Devoir Maison 11

À rendre lundi 19 mai 2025

Exercice 1.

On note les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,1,1,1) \quad u_2 = (1,1,1,0) \quad u_3 = (1,1,0,3) \quad u_4 = (1,0,3,3)$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner les coordonnées de tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{B}$.
En particulier, quelles sont les coordonnées de $(1,0,0,-1)$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 2.

On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-3y+3z, 2y-z, 2y-z) \end{array}$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\ker \varphi$. Que peut-on en conclure pour φ?
3. Déterminer le rang de φ. Que peut-on en conclure pour φ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\varphi$.
5. On note id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Que vaut l'application $\varphi \circ \varphi$?
   (b) En déduire que les applications $\varphi \circ (\varphi - \mathrm{id})$ et $(\varphi - \mathrm{id}) \circ \varphi$ sont nulles.
   (c) À l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id}) \subset \ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi \subset \ker(\varphi - \mathrm{id})$.
6. Montrer que $\ker(\varphi - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\varphi$.
7. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ contenant les vecteurs des bases de $\ker \varphi$ et $\ker(\varphi - \mathrm{id})$ (obtenues en 2. et 4.) est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Donner la matrice qui représente φ dans la base $\mathcal{B}$.