

EXERCICE 1 : LE PACEMAKER

1. Pour $t \geq 0$, l'interrupteur est en position (2), on a le circuit équivalent ci-contre :

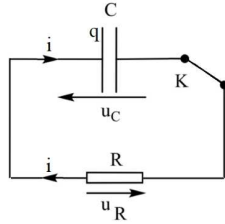
D'après la loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

D'après la loi d'Ohm en convention récepteur aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R \cdot i$.

D'après la relation tension-intensité (ou caractéristique) aux bornes du condensateur en convention récepteur : $i = C \times \frac{du_C}{dt}$

En réinjectant les expressions dans la loi des mailles, il vient : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre.



2. On peut aussi écrire cette équation sous la forme canonique suivante : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = 0$

La solution de cette équation différentielle est celle d'une équation homogène. Elle est donc de la forme : $u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ avec A une constante d'intégration déterminée grâce aux conditions initiales.

Or, pour $t_0 = 0$, le condensateur, initialement chargé, admet à ses bornes une tension $u_0 = E$

Ainsi, par continuité de la tension u_C aux bornes du condensateur, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$.

Or, $u_C(t=0) = A \cdot e^0 = A$. On en déduit donc que $A = E$.

$$\Rightarrow u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

3. La constante de temps τ_D du circuit de décharge est : $\tau_D = RC$ (il s'agit de l'inverse du coefficient situé devant u_C dans la forme canonique de l'équation différentielle).

On dispose de deux méthodes pour déterminer graphiquement sa valeur :

→ **Méthode graphique 1 : Méthode de la tangente à l'origine**

On s'intéresse à la l'asymptote à la courbe à l'infini : comme $u_C \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, cette asymptote s'identifie avec l'axe des abscisses.

On trace la tangente à l'origine de la courbe $u_C(t)$ et on repère l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Cette abscisse s'identifie à τ_D .

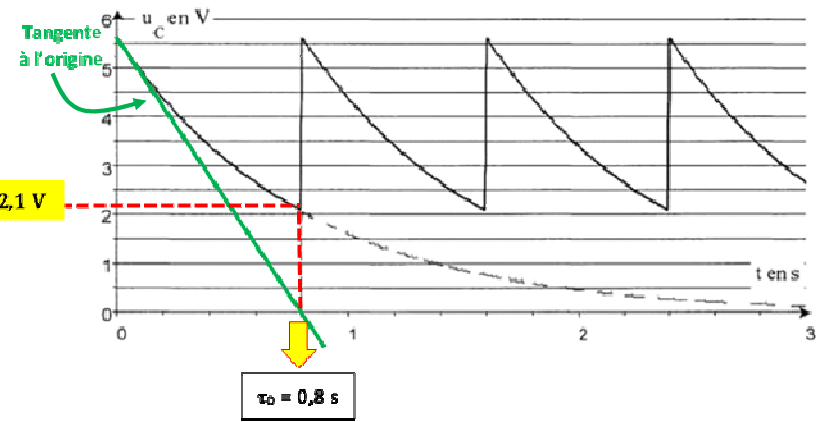
→ **Méthode graphique 2 : Méthode de la décharge à 63 %**

On rappelle que $u_C(\tau_D) = E \cdot e^{-1} = 0,37 \times E$

τ_D est donc l'abscisse du point de la courbe $u_C(t)$ d'ordonnée $0,37 E$.

Par cette méthode, on cherche donc la date τ_D pour laquelle $u_C = 0,37 \times 5,6 = 2,1 \text{ V}$.

Chacune des deux méthodes permet de mesurer $\tau_D = 0,8 \text{ s}$ (voir graphique ci-dessous).



4. D'après l'expression de la constante de temps τ_D : $R = \frac{\tau_D}{C}$.

AN : $R = \frac{0,8}{470 \cdot 10^{-9}}$ soit $R = 2 \cdot 10^6 \Omega = 2 \text{ M}\Omega$

5. D'après l'énoncé, le circuit de déclenchement génère une impulsion électrique quand :

$$u_C(t_1) = u_1 = \frac{E}{e}$$

On cherche donc cette date t_1 :

$$u_C(t_1) = \frac{E}{e} \Leftrightarrow E \cdot e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{E}{e} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = e^{-1} \Leftrightarrow \frac{t_1}{RC} = 1 \Leftrightarrow t_1 = RC = \tau_D$$

6. Pour $t \geq t_1$, l'interrupteur est en position (1), on a le circuit équivalent ci-contre :

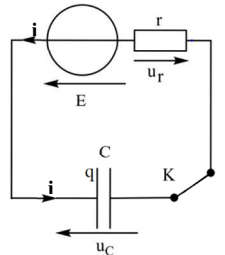
D'après la loi des mailles : $u_r + u_C = E$

D'après la loi d'Ohm en convention récepteur aux bornes du conducteur ohmique : $u_r = r \cdot i$.

D'après la relation tension-intensité aux bornes du condensateur en convention récepteur : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

En remplaçant u_r par son expression, il vient : $rC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, avec un second membre.



7. On peut aussi écrire cette équation sous la forme canonique suivante :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{rC} = \frac{E}{rC}$$

La solution générale de cette équation s'écrit : $u_C(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$

Où $u_{c,h}(t)$ désigne la solution de l'équation homogène : $u_{c,h}(t) = A' \cdot e^{(-t/rc)}$ avec A' une constante à déterminer.

$u_{c,p}(t)$ désigne une solution particulière de l'équation complète : on la cherche de la même forme que le second membre, donc constante. En réinjectant la constante dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient : $u_{c,p} = E$.

La solution générale de l'équation complète est donc : $u_c(t) = A' \cdot e^{(-t/rc)} + E$

On détermine A' grâce à la condition initiale : à t_1 , lorsque l'interrupteur bascule en position (1), le condensateur a une tension à ses bornes u_1 donc : $u_c(t_1^-) = u_1$.

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**, $u_c(t_1^+) = u_c(t_1^-)$

$$\text{Alors : } u_c(t_1^+) = u_1$$

Or, d'après l'expression établie : $u_c(t_1^+) = A' \cdot e^{(-t_1/rc)} + E$

Par identification des deux expressions : $A' \cdot e^{(-t_1/rc)} + E = u_1 \Leftrightarrow A' = (u_1 - E) \cdot e^{(t_1/rc)}$

Finalement : $u_c(t) = (u_1 - E) \cdot e^{(t_1/rc)} \cdot e^{(-t/rc)} + E$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = (u_1 - E) \cdot e^{(-\frac{t-t_1}{rc})} + E}$$

8. La constante de temps τ_c du circuit de charge est $\boxed{\tau_c = rC}$ (il s'agit de l'inverse du coefficient situé devant u_c dans la forme canonique de l'équation différentielle).

Le condensateur est chargé quand le régime permanent est atteint, ce qui est le cas au bout d'une durée égale à $5 \tau_c = 5 rC$.

On compare cette durée à une durée connue, celle de la décharge du condensateur :

$$5 \tau_D = 5 RC = 4,0 \text{ s}$$

Or, d'après l'énoncé, la résistance r est très faible devant R , ce qui implique que rC est très faible devant RC donc que la durée de la charge $5rC$ est très faible devant celle de la décharge $5RC$.

Le condensateur se charge donc en une durée très faible devant $4,0$, ce qu'on peut donc considérer comme quasi instantané à notre échelle de temps.

9. En convention récepteur, pour le condensateur, avec les notations définies plus haut, la puissance instantanée $\mathcal{P}$ reçue par le condensateur s'écrit : $\mathcal{P} = u_c \cdot i$

Ainsi, l'énergie dE emmagasinée par le condensateur pendant une durée élémentaire dt s'écrit :

$$dE = \mathcal{P} \cdot dt = u_c \cdot i \cdot dt$$

Et finalement, entre un état initial (t_i) où la tension aux bornes du condensateur est $u_1 = 2,1 \text{ V}$ et l'énergie stockée dans le condensateur vaut E_i et un état final (t_f) où la tension aux bornes du condensateur est $E = 5,6 \text{ V}$ et l'énergie stockée dans le condensateur vaut E_f , le condensateur aura stocké une énergie ΔE telle que :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{E_i}^{E_f} dE = \int_{t_i}^{t_f} u_c \cdot i \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} u_c \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} \cdot dt = \int_{u_1}^E u_c \cdot C \cdot du_c \\ \Rightarrow \Delta E &= \int_{u_1}^E C \cdot u_c \cdot du_c = C \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot u_c^2 \right]_{u_1}^E \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (E^2 - u_1^2)} \end{aligned}$$

$$\underline{AN} \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \times 470 \cdot 10^{-9} \times (5,6^2 - 2,1^2) \Rightarrow \underline{\Delta E = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 6,3 \mu\text{J}}$$

10. Le circuit de déclenchement génère une impulsion électrique à chaque fois que $u_c = u_1 = \frac{E}{e}$. Or, d'après la Figure 2, cette valeur est périodiquement atteinte avec une période $T = t_1 = 0,8 \text{ s}$.

Par définition, la fréquence f de ce signal périodique est : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

$$\underline{AN} : f = \frac{1}{0,8}$$

soit $f = 1,25 \text{ Hz} = 1,25 \text{ impulsions par seconde} = 75 \text{ impulsions par minute}$.

OU : Le nombre d'impulsions électriques pendant une minute est :

$$N = \frac{\text{durée d'étude}}{\text{durée entre deux impulsions}} = \frac{60}{0,8} = 75 \text{ impulsions pendant une minute}$$

La fréquence des battements du cœur étant la même que celle des impulsions électriques, on en déduit que le dispositif permet au cœur de battre 75 fois par minute, ce qui correspond à un rythme cardiaque normal d'après l'énoncé.

EXERCICE 2 : CHANT DU RORQUAL COMMUN

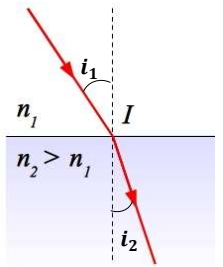
A - Propagation du son dans l'océan

1. Par définition, l'indice optique d'un milieu est : $\boxed{n = \frac{c}{v}}$ avec c la célérité de l'onde lumineuse dans le vide.

Les lois de Descartes de la réfraction au passage d'un rayon lumineux d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 , s'énoncent comme suit :

× Le rayon réfracté au passage par un dioptre est dans le même plan que le rayon lumineux incident et la normale au dioptre

× $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$ avec i_1 : angle du rayon lumineux incident avec la normale au dioptre au point d'incidence, et i_2 : angle du rayon lumineux réfracté dans le milieu (2) avec la normale au dioptre.



Dans le cas du passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent : $n_1 < n_2$

Alors, d'après la relation précédente : $i_1 > i_2$ et le rayon lumineux se rapproche de la normale au passage par le dioptre (cf schéma ci-contre).

2. Un dioptre optique est une surface de séparation entre deux milieux d'indice optique différents, par analogie, on peut définir un dioptre acoustique comme la surface de séparation entre deux milieux dans lesquels le son se déplace à des vitesses différentes.

On définit un indice de réfraction : $\boxed{n = \frac{c_0}{v'}}$

3. Par analogie avec la relation de Descartes relative à la réfraction en optique, on peut écrire pour l'onde sonore circulant du milieu (2) vers le milieu (1) : $n_2 \cdot \sin i_2 = n_1 \cdot \sin i_1$

Or, avec $n_i = \frac{c_0}{v_i}$, cette relation devient : $\frac{c_0}{v_2} \cdot \sin i_2 = \frac{c_0}{v_1} \cdot \sin i_1 \Rightarrow \boxed{v_1 \cdot \sin(i_2) = v_2 \cdot \sin(i_1)}$

on retrouve la relation de l'énoncé.

4. Si $v_2 < v_1$, alors $i_1 > i_2$, et l'onde sonore s'éloigne de la normale au passage du milieu (2) vers le milieu (1). Il peut donc y avoir réflexion totale.

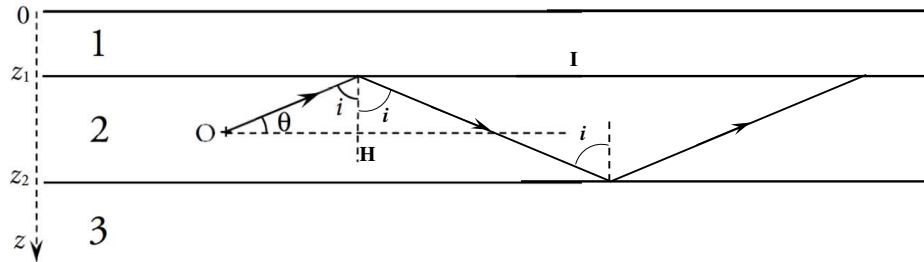
• **Première méthode** : il y a réflexion totale sur le dioptre si $i_1 \geq 90^\circ$. Or, d'après la 2^{ème} loi de Snell-Descartes sur la réfraction, $\sin i_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(i_1)$.

Il y aura donc réflexion totale si $\sin i_2 \geq \frac{v_2}{v_1}$, c'est-à-dire si $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

• **Deuxième méthode** : A la limite de la réflexion totale, l'angle de réfraction $i_1 = 90^\circ$. Cela se produit lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle d'incidence limite $i_{2,\text{lim}}$ tel que, d'après la 2^{ème} loi de Snell-Descartes sur la réfraction : $v_1 \cdot \sin(i_{2,\text{lim}}) = v_1 \cdot \sin(90^\circ)$, soit $i_{2,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

Le phénomène de réflexion totale est observé lorsque $i_2 \geq i_{2,\text{lim}}$, c'est-à-dire si $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

5. Schéma illustrant la marche d'un rayon confinée dans la couche intermédiaire :



L'onde sonore est émise depuis le milieu (2) vers le milieu supérieur (1) tels que $v_2 < v_1$, d'après la question précédente, il y a **réflexion totale** à cette interface si l'angle d'incidence sur l'interface entre les milieux est tel que $i \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

Or, dans le triangle rectangle OIH : $\theta + i + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - i$

Ainsi, $i \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \Leftrightarrow -i \leq -\arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \Leftrightarrow 90^\circ - i \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$
 $\Rightarrow \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

L'onde est alors **réfléchie en I avec un angle i** (égal à l'angle d'incidence), et elle arrive sur le dioptre entre les milieux (2) et (3) avec ce même angle d'incidence. Or $v_3 = v_1$, donc il y a **également réflexion totale, et l'onde reste confinée dans la couche intermédiaire**.

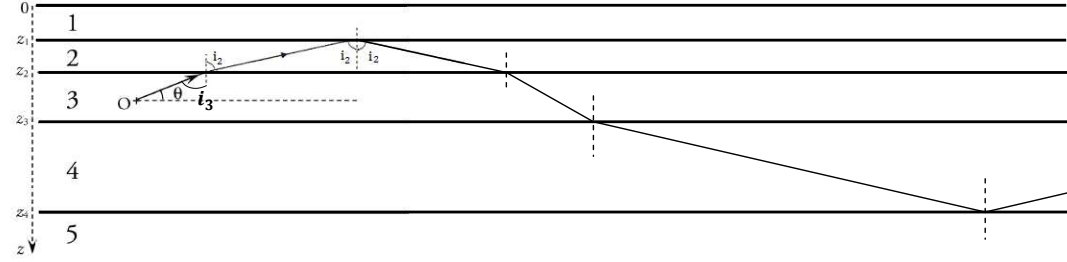
Les valeurs extrêmes de l'angle θ sont donc telles que $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

$$\underline{AN}: 0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{1,48 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 10^3}\right) \Leftrightarrow \underline{0 \leq \theta \leq 11,4^\circ}$$

6. Par analogie avec l'étude précédente, $v_4 = v_2 > v_3$, il y a donc confinement de l'onde dans la couche (3) si : $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$

$$\underline{AN}: 0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{1,48 \cdot 10^3}{1,49 \cdot 10^3}\right) \Leftrightarrow \underline{0 \leq \theta \leq 6,6^\circ}$$

7. Le rayon reste **confiné dans les couches 2, 3 et 4** si :



• Il traverse le dioptre (3) / (2) et subit une réfraction. On en déduit donc : $\theta \geq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$

$$\underline{AN}: \theta \geq 6,6^\circ$$

• Il subit une réflexion totale au niveau du dioptre (2) / (1). On en déduit donc : $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

On en déduit donc : $\sin(i_2) \geq \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow v_3 \cdot \sin(i_2) \geq v_3 \cdot \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow v_2 \cdot \sin(i_3) \geq v_3 \cdot \frac{v_2}{v_1}$

$$\Leftrightarrow \sin(i_3) \geq \frac{v_3}{v_1} \Leftrightarrow i_3 \geq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right) \Leftrightarrow 90^\circ - \theta \geq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right) \Leftrightarrow \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right)$$

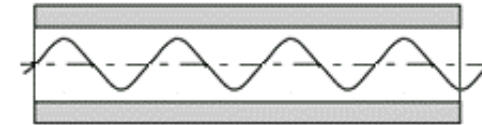
$$\underline{AN}: \theta \leq 11,4^\circ$$

Une fois totalement réfléchie sur le dioptre (2)/(1), l'onde est réfléchie avec l'angle i_2 , elle est ensuite réfractée dans le milieu (3) avec l'angle i_3 . Sa propagation vers le milieu (4) puis (5) se fait de la même manière puisque $v_4 = v_2$ et $v_5 = v_1$, ainsi l'onde reste confinée dans les couches 2, 3, 4.

L'onde reste confinée dans les couches 2, 3 et 4 si :

$$\boxed{90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right) \leq \theta \leq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right)} \quad \text{soit} \quad \underline{6,6^\circ \leq \theta \leq 11,4^\circ}$$

8. Lorsque la vitesse du son varie de manière continue dans un milieu, la direction de l'onde sonore change progressivement. Il n'y a alors plus de rupture de pente comme dans le cas d'un dioptre net, mais une variation continue de l'orientation du rayon, on obtient alors l'allure suivante :



profil d'ondulations.

B - A l'écoute d'un rorqual

9. Système : {rorqual}

Référentiel : référentiel terrestre associé au repère d'axe (Ox) porté par un vecteur unitaire $\vec{e}_x$ décrit dans l'énoncé, et à l'horloge d'instant initial défini dans l'énoncé.

D'après l'énoncé, le système admet une vitesse constante telle que : $\vec{v}_R = v_R \cdot \vec{e}_x$. L'abscisse v_{Rx} du vecteur vitesse du rorqual est donc égale à v_R , ce qu'on peut noter : $v_{Rx} = v_R$

On intègre v_{Rx} pour obtenir l'abscisse x_R du rorqual : $x_R(t) = v_R \cdot t + cste$

Or, le rorqual est initialement à l'abscisse : $x_R(t = 0) = D$ d'après l'énoncé.

De plus, $x_R(t = 0) = v_R \times 0 + cste = cste$; on en déduit donc que : $cste = D$

On obtient l'équation horaire du rorqual : $x_R(t) = v_R \cdot t + D$.

10. Dans le même référentiel, on étudie désormais le système {bateau}.

D'après l'énoncé, il admet une accélération constante telle que : $\vec{a}_B = a_B \cdot \vec{e}_x$. L'abscisse a_{Bx} du vecteur accélération vaut donc $a_{Bx} = a_B$.

On intègre a_{Bx} pour obtenir l'abscisse v_{Bx} du bateau : $v_{Bx} = a_B \cdot t + cste'$

Or, le bateau est initialement à l'arrêt : $v_{Bx}(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé.

De plus, $v_{Bx}(t = 0) = a_B \times 0 + cste' = cste'$; on en déduit donc que : $cste' = 0$

On a donc finalement : $v_{Bx} = a_B \cdot t$

On intègre v_{Bx} pour obtenir l'abscisse x_B du bateau : $x_B(t) = \frac{1}{2} a_B \cdot t^2 + cste''$

Or, le bateau est initialement à l'abscisse : $x_B(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé.

De plus, $x_B(t = 0) = \frac{1}{2} a_B \times 0^2 + cste'' = cste''$; on en déduit donc que : $cste'' = 0$

On obtient l'équation horaire du bateau : $x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot t^2$.

11. Le bateau coupe son moteur au bout d'une durée Δt telle que $x_R(\Delta t) - x_B(\Delta t) = d$

$$\Rightarrow v_R \cdot \Delta t + D - \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot \Delta t^2 = d$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot a_B \cdot \Delta t^2 + v_R \cdot \Delta t + (D - d) = 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré, dont on détermine les racines à la calculatrice :

$$\underline{AN} : -1,5 \cdot \Delta t^2 + 2,0 \cdot \Delta t + 800 = 0$$

on obtient deux racines : $\Delta t_1 = -22 \text{ s}$ et $\Delta t_2 = 23 \text{ s}$

Seule la racine positive est pertinente, car la durée cherchée est nécessairement positive :

$$\underline{\Delta t = \Delta t_2 = 23 \text{ s}}$$