

EXERCICE 1 : LES SUCRES

1. Un atome de carbone asymétrique est un **atome de carbone lié à 4 atomes ou groupes d'atomes différents**.

Dans les glucopyranoses, il s'agit des **atomes de carbone 1, 2, 3, 4 et 5**.

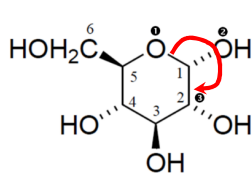
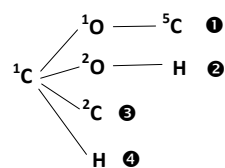
2. La forme α et la forme β sont des stéréoisomères de configuration qui ne sont pas images l'une de l'autre par un miroir plan : elles forment donc un couple de **DIASTÉREOISOMÈRES**.

Remarque : La forme α et la forme β sont des :

- **STEREOISOMÈRES** car elles ont la même formule brute et la même formule semi-développée mais différent par l'agencement de leurs atomes dans l'espace ;
- Stéréoisomères de **CONFIGURATION** car on est obligé de casser des liaisons pour passer de l'une à l'autre.

3. Il y a **uniquement l'atome de carbone n°1 qui change de configuration** entre le α -D-glucose et le β -D-glucose.

Pour déterminer la configuration absolue de cet atome dans la forme α , on classe ses substituants par ordre de priorité décroissante selon les **régles de Cahn, Ingold et Prélog** :



On relie les substituants 1 → 2 → 3 dans le **sens horaire** avec un substituant 4 placé vers l'avant.
 ➔ On en déduit que le **carbone asymétrique n°1 est de configuration S**.

4. Les molécules qui ont un pouvoir rotatoire spécifique positif sont qualifiées de **dextrogyres** : cela désigne la propriété d'une **molécule qui dévie vers la droite le plan de polarisation d'une lumière polarisée rectilignement pour un opérateur qui reçoit la lumière dans l'œil**.

5. Pour une solution diluée ne contenant qu'une seule espèce chirale, la loi de Biot s'écrit : $\alpha_0 = [\alpha_a] \cdot \ell \cdot C_0$

avec C_0 la concentration en masse en D-glucose, soit $C_0 = \frac{m}{V}$; finalement, $\alpha_0 = [\alpha_a] \cdot \ell \cdot \frac{m}{V}$

AN → $\alpha_0 = 112 \times 1,00 \times \frac{2,00}{5,00}$ soit **$\alpha_0 = 44,8^\circ$**

6. Considérons l'équilibre $\alpha \rightleftharpoons \beta$ atteint et notons respectivement C_α et C_β les concentrations en masse en formes α et β à l'équilibre. Par conservation de la masse :

$$C_0 = \frac{m}{V} = C_\alpha + C_\beta \quad (*)$$

Or, **la loi de Biot est additive** donc : $\alpha_{eq} = [\alpha_a] \cdot \ell \cdot C_\alpha + [\alpha_\beta] \cdot \ell \cdot C_\beta$ (**)

On cherche les **proportions de chaque forme** dans le mélange notées : $p_\alpha = \frac{C_\alpha}{C_0}$ et $p_\beta = \frac{C_\beta}{C_0}$

En divisant (*) par C_0 , on obtient : $p_\alpha + p_\beta = 1$

Ainsi, la relation (**) devient : $\frac{\alpha_{eq}}{C_0} = [\alpha_a] \cdot \ell \cdot p_\alpha + [\alpha_\beta] \cdot \ell \cdot p_\beta$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{eq}}{C_0} = [\alpha_a] \cdot \ell \cdot p_\alpha + [\alpha_\beta] \cdot \ell \cdot (1 - p_\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{eq}}{C_0} = ([\alpha_a] - [\alpha_\beta]) \cdot \ell \cdot p_\alpha + [\alpha_\beta] \cdot \ell$$

$$\Rightarrow p_\alpha = \frac{\frac{\alpha_{eq}}{C_0} - [\alpha_\beta] \cdot \ell}{([\alpha_a] - [\alpha_\beta]) \cdot \ell} \quad \text{avec } C_0 = \frac{m}{V}$$

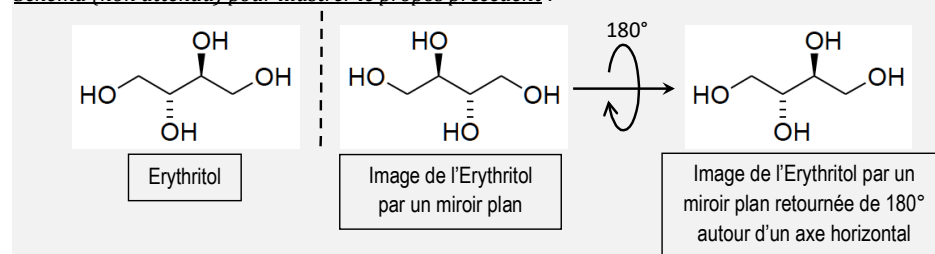
$$\Rightarrow p_\alpha = \frac{\alpha_{eq} \cdot V - m \cdot [\alpha_\beta] \cdot \ell}{m \cdot ([\alpha_a] - [\alpha_\beta]) \cdot \ell}$$

AN → $p_\alpha = \frac{21,0 \times 5,00 - 2,00 \times 18,7 \times 1,00}{2,00 \times (112 - 18,7) \times 1,00}$ soit **$p_\alpha = 0,36$** et **$p_\beta = 1 - p_\alpha$** soit **$p_\beta = 0,64$**

Le mélange à l'équilibre contient donc **36 % de la forme α** et **64 % de la forme β** : la **forme β , plus représentée, est donc plus stable en solution aqueuse**.

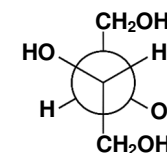
7. **La molécule d'érythritol n'est pas chirale** (elle est achirale) car elle est superposable à son image par un miroir plan.

Schéma (non attendu) pour illustrer le propos précédent :

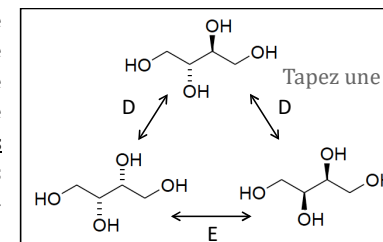


Cette molécule comporte deux atomes de carbone asymétriques qui portent les mêmes substituants et elle est achirale : il s'agit donc d'un **composé méso**.

8. La projection de Newman selon l'orientation proposée est la suivante :



9. La molécule présentée comporte deux atomes de carbone asymétriques soit $2^2 = 4$ stéréo-isomères de configuration au maximum ; ici, la présence d'un centre de symétrie fait chuter ce nombre : la molécule présentée ne possèdera donc que **trois stéréoisomères de configuration** au total. Les relations entre ces stéréoisomères sont indiquées ci-contre :

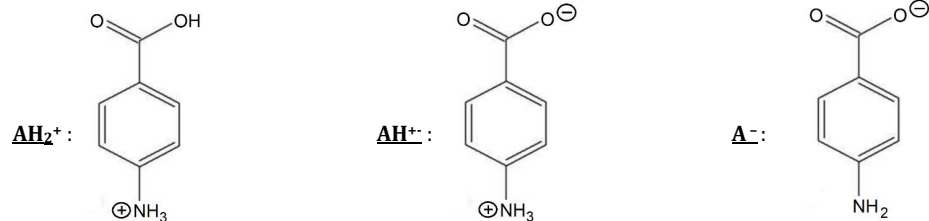


« D » pour diastéréoisomères (stéréoisomères de configuration non images l'un de l'autre dans un miroir plan)

« E » pour énantiomères (stéréoisomères de configuration images l'un de l'autre dans un miroir plan).

EXERCICE 2 : LA BENZOCAÏNE

1. Le pK_a associé au groupe amino est plus élevé que celui associé au groupe carboxyle. On propose donc les formules suivantes pour les formes AH_2^+ , AH^+ , et A^- :



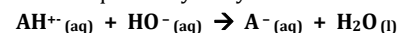
2. Le diagramme de prédominance de l'acide 4-aminobenzoïque est le suivant :



3. Au début du titrage, le pH de la solution est égal à 3,2 : d'après le diagramme de prédominance tracé précédemment, l'acide 4-aminobenzoïque prédomine sous **forme AH^+** .

A la fin du titrage, le pH de la solution est supérieur à 12 : d'après le diagramme de prédominance tracé précédemment, l'acide 4-aminobenzoïque prédomine sous **forme A^-** .

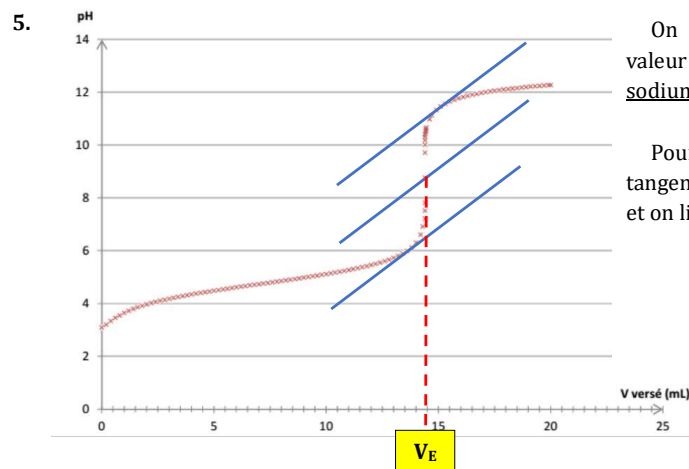
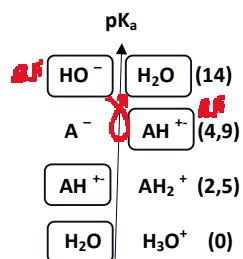
4. La réaction prépondérante entre la forme prépondérante de l'acide 4-aminobenzoïque et l'hydroxyde de sodium est :



Sa constante d'équilibre vaut : $K^o = 10^{(pK_a(H_2O/HO^-) - pK_{a2}(AH^+/A^-))}$.

$$\underline{AN} \rightarrow K^o = 10^{(14 - 4,9)} \quad \text{soit } K^o = 10^{9,1}$$

Cette constante d'équilibre est supérieure à 10^3 ; on peut donc considérer la réaction de titrage comme totale, ce qui est un des critères indispensables pour une réaction de titrage.



On commence par déterminer la valeur V_E du volume d'hydroxyde de sodium versé à l'équivalence.

Pour cela, on utilise la méthode des tangentes sur le graphique $pH = f(V_{\text{versé}})$ et on lit $V_E = 14,5 \text{ mL}$.

A l'équivalence, les réactifs titré (AH^+) et titrant (HO^-) ont été mélangés dans les proportions stœchiométriques. On a donc la relation :

$$\frac{n(AH^+)_{\text{dosé}}}{1} = \frac{n(HO^-)_{\text{versé}}}{1} \Leftrightarrow \frac{C_a \times V_a}{1} = \frac{C_0 \times V_E}{1}$$

$$\Leftrightarrow C_a = C_0 \times \frac{V_E}{V_a}$$

$$\rightarrow \underline{AN} : C_a = \frac{5,00 \cdot 10^{-1} \times 14,5}{50,0} \quad \text{soit } C_a = 1,45 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

6. On peut définir la pureté P de l'acide 4-aminobenzoïque par la relation : $P = \frac{m_a}{m}$ avec $m = 1,00$ g la masse de poudre qui a été pesée pour préparer la solution S et m_a la masse réelle d'acide 4-aminobenzoïque présente dans cette masse m de poudre.

Or, le contenu entier de la solution S ayant été dosé, on en déduit que la masse m_a d'acide 4-aminobenzoïque présente dans la poudre est donnée par la relation : $m_a = C_a \times V_a \times M_a$.

$$\text{Finalement, } P = \frac{C_a \times V_a \times M_a}{m}$$

$$\rightarrow \underline{AN} : P = \frac{1,45 \cdot 10^{-1} \times 50,0 \cdot 10^{-3} \times 137}{1,00} \quad \text{soit } P = 0,993 = 99,3 \%$$

La pureté du flacon d'acide 4-aminobenzoïque étant supérieure à 98 %, celui-ci peut être utilisé pour réaliser la synthèse de la benzocaïne.

7. La benzocaïne et l'acide 4-aminobenzoïque sont toutes les deux polaires via les groupes amino, carboxyle et ester : ces derniers étant globalement les mêmes pour ces deux structures, la polarité de ces deux molécules est donc équivalente ; de plus, ces molécules ont une taille globalement équivalente, donc une polarisabilité équivalente. De ce fait, ces deux molécules subiront les trois interactions intermoléculaires de Van Der Waals (Keesom, Debye et London) avec une intensité équivalente, ce qui ne permet donc pas de justifier l'écart entre les deux températures de fusion.

En revanche, par la présence des groupes amino, carboxyle et ester, ces molécules peuvent toutes les deux établir des interactions intermoléculaires de type liaison H. Plus précisément :

l'acide 4-aminobenzoïque présente 3 sites accepteurs de liaisons H (l'azote du groupe amino + les deux oxygènes du groupe carboxyle) et 3 sites donneurs de liaisons H (les deux hydrogènes du groupe amino + l'hydrogène du groupe carboxyle) ;

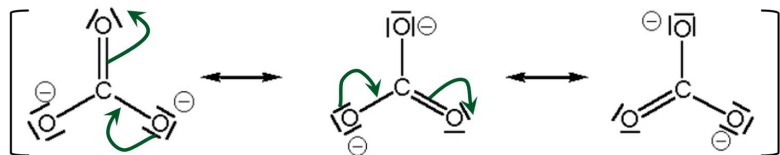
la benzocaïne présente 3 sites accepteurs de liaisons H (l'azote du groupe amino + les deux oxygènes du groupe ester) et 2 sites donneurs de liaisons H (les deux hydrogènes du groupe amino).

Finalement, l'acide 4-aminobenzoïque peut établir davantage d'interactions intermoléculaires de type liaison H que la benzocaïne, ce qui justifie une température de fusion plus forte pour l'acide 4-aminobenzoïque.

8. # Configuration électronique de l'atome de carbone dans son état fondamental : $1s^2 2s^2 2p^2$
Configuration électronique de l'atome d'oxygène dans son état fondamental : $1s^2 2s^2 2p^4$

9. Les atomes de carbone et d'oxygène possèdent respectivement 4 et 6 électrons de valence, il y aura $d = \frac{4 + 3 \times 6 + 2}{2} = 12$ doublets d'électrons dans l'ion carbonate.

On propose les formules mésomères les plus représentatives ci-dessous :

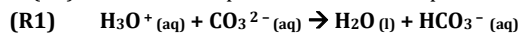


10. La géométrie est à analyser sur la forme moyenne des trois représentations précédentes, appelée hybride de résonance :

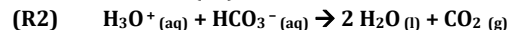
La formule VSEPR de cet ion est AX_3E_0 : cela correspond à un polyèdre triangle équilatéral et à une géométrie **triangulaire plane**.

Les trois liaisons étant équivalentes : **les angles de liaisons sont égaux à 120°**, **les longueurs de liaisons sont les mêmes**, plus longues qu'une liaison double C=O, plus courte qu'une liaison simple C-O.

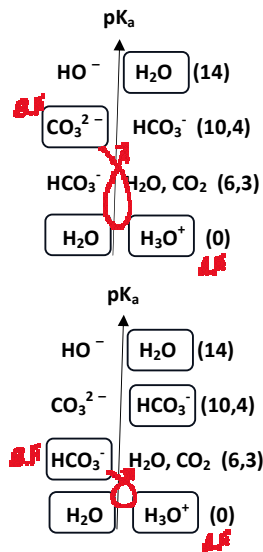
11. L'énoncé précise qu'à l'issue de la synthèse, le mélange réactionnel est très acide. On en déduit donc qu'il y a une grande quantité d'ions oxonium H_3O^+ présents dans le milieu. D'après l'axe des pK_a ci-contre, la réaction (R1) entre l'acide le plus fort et la base la plus forte est :



A ce stade, aucun gaz ne s'est formé. Mais une fois les ions carbonate transformés en ions hydrogencarbonate, ces derniers peuvent à leur tour réagir avec les ions H_3O^+ présents dans le mélange réactionnel selon la réaction (R2) ci-dessous :



Le gaz qui se forme est donc du **dioxyde de carbone**.



12. La molécule d'eau est **POLAIRE** et **PROTIQUE** alors que la molécule d'éthoxyéthane est **POLAIRE** et **APROTIQUE**.

La molécule d'éthoxyéthane n'ayant que son caractère POLAIRE commun avec l'eau, cela explique pourquoi elle n'est que peu miscible avec l'eau.

13. A $pH = 9$:

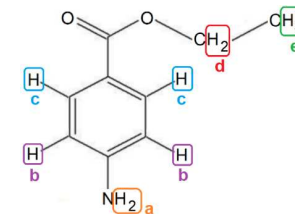
l'acide 4-aminobenzoïque est majoritairement présent sous la **forme A** (car $pH > pK_{a2}$) ;
la benzocaïne est majoritairement présent sous la **forme B** (car $pH > pK_{a5}$) ;

14. A l'issue de l'extraction,

- L'acide 4-amino-benzoïque est sous sa forme A- : ion polaire, protique.
- La benzocaïne est sous sa forme B : molécule polaire, protique.

L'eau étant très polaire, c'est l'interaction ion-dipôle qui favorise la solubilité de l'acide-4-aminobenzoïque dans l'eau tandis que la benzocaïne se solubilise dans l'éther en raison des nombreuses d'interactions de VdW et des liaisons hydrogène.

15. Pour analyser le spectre de RMN 1H , on commence par repérer les groupes de protons équivalents (GPE) sur la molécule de benzocaïne : voir ci-contre. Il y en a 5, en accord avec le spectre de RMN 1H qui présente 5 signaux .



On peut alors répondre à la question de deux manières différentes :

1ère méthode : on prévoit le type de signal attendu pour chaque GPE de la benzocaïne puis on cherche sur le spectre le signal qui peut lui être attribué. Le tableau suivant résume la démarche.

GPE étudié	Nombre de H voisins équivalents	Multiplicité*	Intégration**	Attribution d'un signal
2 H _a	Lié à un hétéroatome	0 + 1 = 1 = singulet	2	δ_4
2 H _b	1 H _c	1 + 1 = 2 = doublet	2	δ_1 ou δ_2
2 H _c	1 H _b	1 + 1 = 2 = doublet	2	δ_1 ou δ_2
2 H _d	3 H _e	3 + 1 = 4 = quadruplet	2	δ_3
3 H _e	2 H _d	2 + 1 = 3 = triplet	3	δ_5

* **Multiplicité** = Nombre de H voisins équivalents + 1

** **Intégration** = Nombre de H du GPE étudié

2ème méthode : On analyse chaque signal du spectre de RMN 1H pour prévoir le type de GPE attendu puis on cherche le GPE qui peut lui être attribué sur la molécule. Le tableau suivant résume la démarche .

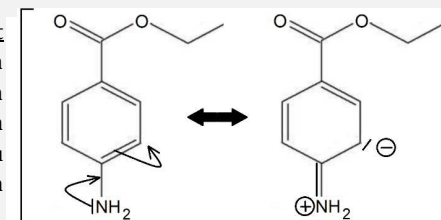
Signal étudié	Lecture du spectre		Analyse du spectre*,**	Attribution d'un GPE
	Multiplicité	Intégration		
δ_1	doublet	1 cm	2 H voisins de 1 H	2 H _b ou 2 H _c
δ_2	doublet	1 cm	2 H voisins de 1 H	2 H _b ou 2 H _c
δ_3	quadruplet	1 cm	2 H voisins de 3 H équivalent	2 H _d
δ_4	singulet	1 cm	2H isolés ou liés à 1 hétéroatome	2 H _a
δ_5	triplet	1,5 cm	3 H voisins de 2 H équivalents	3 H _e

* **Nombre de H voisins équivalents** = Multiplicité - 1

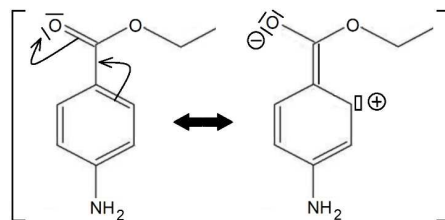
** **Intégration** = la somme des hauteurs de tous les paliers mesure 5,5 cm, correspondant aux 11 H de la molécule de benzocaïne, soit 0,5 cm par H.

Remarque : Les signaux du GPE (b) et du GPE (c) ont la même multiplicité et la même intégration. Pour trancher entre δ_1 et δ_2 , on se base sur la proximité de ces GPE avec un groupe mésomère donneur ou mésomère attracteur :

le GPE (b) est proche du groupe AMINO qui est mésomère donneur : cela signifie que ce groupe a tendance à donner ses électrons, notamment en direction du cycle aromatique (voir ci-contre). Cela a pour conséquence de diminuer la valeur du déplacement chimique (on parle de blindage) : on lui attribue donc le déplacement chimique δ_2 .



le GPE (c) est proche du groupe ESTER qui est mésomère attracteur : cela signifie que ce groupe a tendance à attirer vers lui les électrons de son environnement (voir ci-contre). La conséquence est une augmentation de la valeur du déplacement chimique (on parle de déblindage) : on lui attribue donc le déplacement chimique δ_1 .



16. **La seule bande qui permet de distinguer l'acide 4-aminobenzoïque de la benzocaïne est celle caractérisant la liaison O-H du groupe carboxyle** : elle doit en effet être présente pour le spectre de l'acide 4-aminobenzoïque mais absente dans le spectre de la benzocaïne.

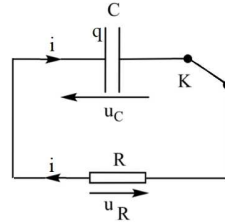
Or, d'après la table IR, cette bande est large, forte à moyenne et située à des nombres d'onde compris entre 2500 cm^{-1} et 3200 cm^{-1} : on la repère pour le spectre 1 mais pas pour le spectre 2.

Conclusion : Spectre 1 = acide 4-aminobenzoïque
Spectre 2 = Benzocaïne

Remarque : # *Spectre 1* : on repère aussi vers 1680 cm^{-1} la bande forte et fine caractéristique de la liaison C=O « ester » ainsi qu'entre 3300 et 3500 cm^{-1} et entre 1560 et 1640 cm^{-1} des bandes fortes caractéristiques de la liaison N-H « amine » ;
Spectre 2 : on repère aussi vers 1680 cm^{-1} la bande forte et fine caractéristique de la liaison C=O « acide carboxylique » ainsi qu'entre 3300 et 3500 cm^{-1} et entre 1560 et 1640 cm^{-1} des bandes fortes caractéristiques de la liaison N-H « amine ».

EXERCICE 1 : LE PACEMAKER

1. Pour $t \geq 0$, l'interrupteur est en position (2), on a le circuit équivalent ci-contre :



D'après la loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

D'après la loi d'Ohm en convention récepteur aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R \cdot i$.

D'après la relation tension-intensité (ou caractéristique) aux bornes du condensateur en convention récepteur : $i = C \times \frac{du_C}{dt}$

En réinjectant les expressions dans la loi des mailles, il vient : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre.

2. On peut aussi écrire cette équation sous la forme canonique suivante : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = 0$

La solution de cette équation différentielle est celle d'une équation homogène. Elle est donc de la forme : $u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ avec A une constante d'intégration déterminée grâce aux conditions initiales.

Or, pour $t_0 = 0$, le condensateur, initialement chargé, admet à ses bornes une tension $u_0 = E$

Ainsi, par continuité de la tension u_C aux bornes du condensateur, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$.

Or, $u_C(t=0) = A \cdot e^0 = A$. On en déduit donc que $A = E$.

$$\Rightarrow u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

3. La constante de temps τ_D du circuit de décharge est : $\tau_D = RC$ (il s'agit de l'inverse du coefficient situé devant u_C dans la forme canonique de l'équation différentielle).

On dispose de deux méthodes pour déterminer graphiquement sa valeur :

→ **Méthode graphique 1 : Méthode de la tangente à l'origine**

On s'intéresse à la l'asymptote à la courbe à l'infini : comme $u_C \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, cette asymptote s'identifie avec l'axe des abscisses.

On trace la tangente à l'origine de la courbe $u_C(t)$ et on repère l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Cette abscisse s'identifie à τ_D .

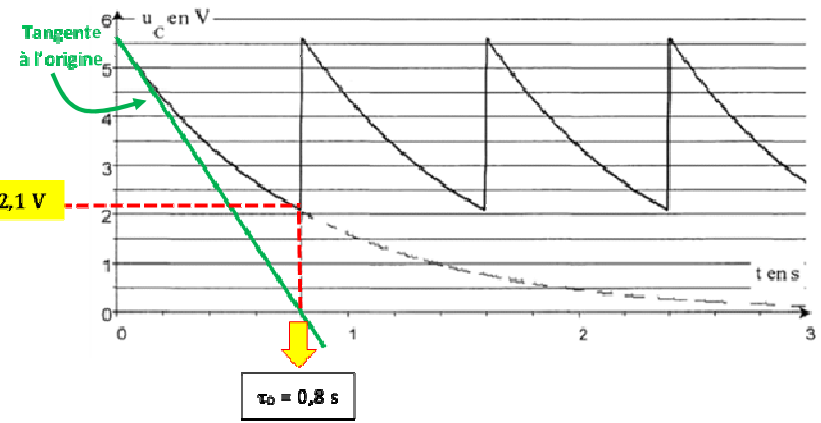
→ **Méthode graphique 2 : Méthode de la décharge à 63 %**

On rappelle que $u_C(\tau_D) = E \cdot e^{-1} = 0,37 \times E$

τ_D est donc l'abscisse du point de la courbe $u_C(t)$ d'ordonnée $0,37 E$.

Par cette méthode, on cherche donc la date τ_D pour laquelle $u_C = 0,37 \times 5,6 = 2,1 V$.

Chacune des deux méthodes permet de mesurer $\tau_D = 0,8 s$ (voir graphique ci-dessous).



4. D'après l'expression de la constante de temps τ_D : $R = \frac{\tau_D}{C}$.

AN : $R = \frac{0,8}{470 \cdot 10^{-9}}$ soit $R = 2 \cdot 10^6 \Omega = 2 M\Omega$

5. D'après l'énoncé, le circuit de déclenchement génère une impulsion électrique quand :

$$u_C(t_1) = u_1 = \frac{E}{e}$$

On cherche donc cette date t_1 :

$$u_C(t_1) = \frac{E}{e} \Leftrightarrow E \cdot e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{E}{e} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = e^{-1} \Leftrightarrow \frac{t_1}{RC} = 1 \Leftrightarrow t_1 = RC = \tau_D$$

6. Pour $t \geq t_1$, l'interrupteur est en position (1), on a le circuit équivalent ci-contre :

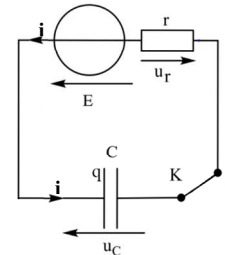
D'après la loi des mailles : $u_r + u_C = E$

D'après la loi d'Ohm en convention récepteur aux bornes du conducteur ohmique : $u_r = r \cdot i$.

D'après la relation tension-intensité aux bornes du condensateur en convention récepteur : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

En remplaçant u_r par son expression, il vient : $rC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, avec un second membre.



7. On peut aussi écrire cette équation sous la forme canonique suivante :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{rC} = \frac{E}{rC}$$

La solution générale de cette équation s'écrit : $u_C(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$

Où $u_{c,h}(t)$ désigne la solution de l'équation homogène : $u_{c,h}(t) = A' \cdot e^{(-t/rC)}$ avec A' une constante à déterminer.

$u_{c,p}(t)$ désigne une solution particulière de l'équation complète : on la cherche de la même forme que le second membre, donc constante. En réinjectant la constante dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient : $u_{c,p} = E$.

La solution générale de l'équation complète est donc : $u_c(t) = A' \cdot e^{(-t/rc)} + E$

On détermine A' grâce à la condition initiale : à t_1 , lorsque l'interrupteur bascule en position (1), le condensateur a une tension à ses bornes u_1 donc : $u_c(t_1^-) = u_1$.

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**, $u_c(t_1^+) = u_c(t_1^-)$

$$\text{Alors : } u_c(t_1^+) = u_1$$

Or, d'après l'expression établie : $u_c(t_1^+) = A' \cdot e^{(-t_1/rc)} + E$

Par identification des deux expressions : $A' \cdot e^{(-t_1/rc)} + E = u_1 \Leftrightarrow A' = (u_1 - E) \cdot e^{(t_1/rc)}$

Finalement : $u_c(t) = (u_1 - E) \cdot e^{(t_1/rc)} \cdot e^{(-t/rc)} + E$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = (u_1 - E) \cdot e^{(-\frac{t-t_1}{rc})} + E}$$

8. La constante de temps τ_c du circuit de charge est $\boxed{\tau_c = rC}$ (il s'agit de l'inverse du coefficient situé devant u_c dans la forme canonique de l'équation différentielle).

Le condensateur est chargé quand le régime permanent est atteint, ce qui est le cas au bout d'une durée égale à $5 \tau_c = 5 rC$.

On compare cette durée à une durée connue, celle de la décharge du condensateur :

$$5 \tau_D = 5 RC = 4,0 \text{ s}$$

Or, d'après l'énoncé, la résistance r est très faible devant R , ce qui implique que rC est très faible devant RC donc que la durée de la charge $5rC$ est très faible devant celle de la décharge $5RC$.

Le condensateur se charge donc en une durée très faible devant 4,0, ce qu'on peut donc considérer comme quasi instantané à notre échelle de temps.

9. En convention récepteur, pour le condensateur, avec les notations définies plus haut, la puissance instantanée \mathcal{P} reçue par le condensateur s'écrit : $\mathcal{P} = u_c \cdot i$

Ainsi, l'énergie dE emmagasinée par le condensateur pendant une durée élémentaire dt s'écrit :

$$dE = \mathcal{P} \cdot dt = u_c \cdot i \cdot dt$$

Et finalement, entre un état initial (t_i) où la tension aux bornes du condensateur est $u_1 = 2,1 \text{ V}$ et l'énergie stockée dans le condensateur vaut E_i et un état final (t_f) où la tension aux bornes du condensateur est $E = 5,6 \text{ V}$ et l'énergie stockée dans le condensateur vaut E_f , le condensateur aura stocké une énergie ΔE telle que :

$$\Delta E = \int_{E_i}^{E_f} dE = \int_{t_i}^{t_f} u_c \cdot i \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} u_c \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} \cdot dt = \int_{u_1}^E u_c \cdot C \cdot du_c$$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_{u_1}^E C \cdot u_c \cdot du_c = C \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot u_c^2 \right]_{u_1}^E \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (E^2 - u_1^2)}$$

$$\underline{AN} \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \times 470 \cdot 10^{-9} \times (5,6^2 - 2,1^2) \Rightarrow \underline{\Delta E = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 6,3 \mu\text{J}}$$

10. Le circuit de déclenchement génère une impulsion électrique à chaque fois que $u_c = u_1 = \frac{E}{e}$. Or, d'après la Figure 2, cette valeur est périodiquement atteinte avec une **période $T = t_1 = 0,8 \text{ s}$** .

Par définition, la fréquence f de ce signal périodique est : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

$$\underline{AN} : f = \frac{1}{0,8}$$

soit $f = 1,25 \text{ Hz} = 1,25 \text{ impulsions par seconde} = 75 \text{ impulsions par minute}$.

QU : Le nombre d'impulsions électriques pendant une minute est :

$$N = \frac{\text{durée d'étude}}{\text{durée entre deux implusions}} = \frac{60}{0,8} = 75 \text{ impulsions pendant une minute}$$

La fréquence des battements du cœur étant la même que celle des impulsions électriques, on en déduit que le dispositif permet au cœur de battre 75 fois par minute, ce qui correspond à un rythme cardiaque normal d'après l'énoncé.

EXERCICE 2 : CHANT DU RORQUAL COMMUN

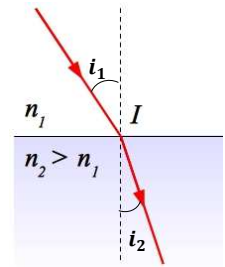
A - Propagation du son dans l'océan

1. Par définition, l'indice optique d'un milieu est : $\boxed{n = \frac{c}{v}}$ avec c la célérité de l'onde lumineuse dans le vide.

Les lois de Descartes de la réfraction au passage d'un rayon lumineux d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 , s'énoncent comme suit :

× **Le rayon réfracté au passage par un dioptre est dans le même plan que le rayon lumineux incident et la normale au dioptre**

× $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$ avec i_1 : angle du rayon lumineux incident avec la normale au dioptre au point d'incidence, et i_2 : angle du rayon lumineux réfracté dans le milieu (2) avec la normale au dioptre.



Dans le cas du passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent : $n_1 < n_2$

Alors, d'après la relation précédente : $i_1 > i_2$ et **le rayon lumineux se rapproche de la normale au passage par le dioptre** (cf schéma ci-contre).

2. Un dioptre optique est une surface de séparation entre deux milieux d'indice optique différents, par analogie, on peut définir un dioptre acoustique comme la **surface de séparation entre deux milieux dans lesquels le son se déplace à des vitesses différentes**.

On définit un indice de réfraction : $\boxed{n = \frac{c_0}{v'}}$

3. Par analogie avec la relation de Descartes relative à la réfraction en optique, on peut écrire pour l'onde sonore circulant du milieu (2) vers le milieu (1) : $n_2 \cdot \sin i_2 = n_1 \cdot \sin i_1$

Or, avec $n_i = \frac{c_0}{v_i}$, cette relation devient : $\frac{c_0}{v_2} \cdot \sin i_2 = \frac{c_0}{v_1} \cdot \sin i_1 \Rightarrow \boxed{v_1 \cdot \sin(i_2) = v_2 \cdot \sin(i_1)}$

on retrouve la relation de l'énoncé.

4. Si $v_2 < v_1$, alors $i_1 > i_2$, et l'onde sonore s'éloigne de la normale au passage du milieu (2) vers le milieu (1). Il peut donc y avoir réflexion totale.

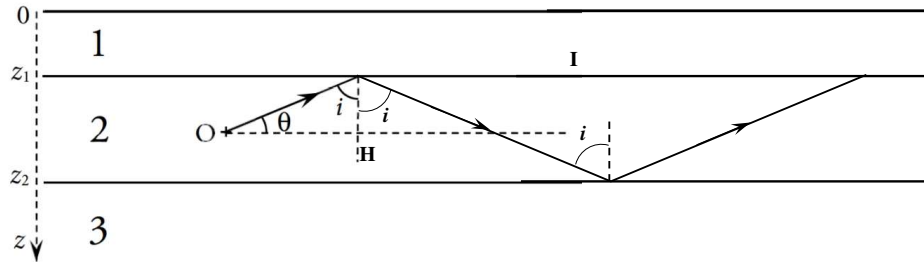
• **Première méthode** : il y a réflexion totale sur le dioptre si $i_1 \geq 90^\circ$. Or, d'après la 2^{ème} loi de Snell-Descartes sur la réfraction, $\sin i_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(i_1)$.

Il y aura donc réflexion totale si $\sin i_2 \geq \frac{v_2}{v_1}$, c'est-à-dire si $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

• **Deuxième méthode** : A la limite de la réflexion totale, l'angle de réfraction $i_1 = 90^\circ$. Cela se produit lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle d'incidence limite $i_{2,lim}$ tel que, d'après la 2^{ème} loi de Snell-Descartes sur la réfraction : $v_1 \cdot \sin(i_{2,lim}) = v_1 \cdot \sin(90^\circ)$, soit $i_{2,lim} = \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

Le phénomène de réflexion totale est observé lorsque $i_2 \geq i_{2,lim}$, c'est-à-dire si $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

5. Schéma illustrant la marche d'un rayon confinée dans la couche intermédiaire :



L'onde sonore est émise depuis le milieu (2) vers le milieu supérieur (1) tels que $v_2 < v_1$, d'après la question précédente, il y a **réflexion totale** à cette interface si l'angle d'incidence sur l'interface entre les milieux est tel que $i \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

Or, dans le triangle rectangle OIH : $\theta + i + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - i$

Ainsi, $i \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \Leftrightarrow -i \leq -\arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \Leftrightarrow 90^\circ - i \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$
 $\Rightarrow \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

L'onde est alors **réfléchi en I avec un angle i** (égal à l'angle d'incidence), et elle arrive sur le dioptre entre les milieux (2) et (3) avec ce même angle d'incidence. Or $v_3 = v_1$, donc il y a **également réflexion totale, et l'onde reste confinée dans la couche intermédiaire**.

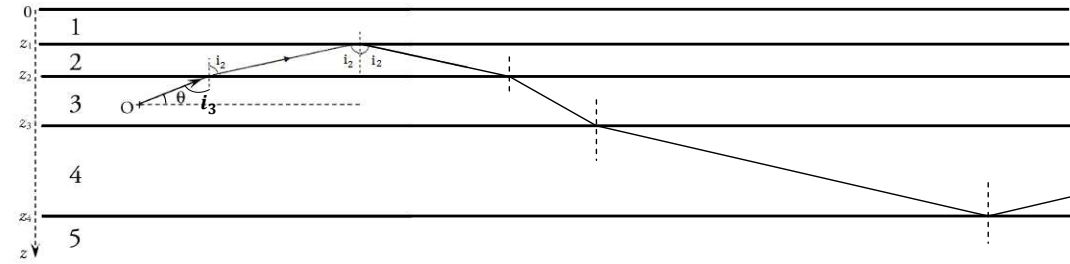
Les valeurs extrêmes de l'angle θ sont donc telles que $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

AN : $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{1,48 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 10^3}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq 11,4^\circ$

6. Par analogie avec l'étude précédente, $v_4 = v_2 > v_3$, il y a donc confinement de l'onde dans la couche (3) si : $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$

AN : $0 \leq \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{1,48 \cdot 10^3}{1,49 \cdot 10^3}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq 6,6^\circ$

7. Le rayon reste **confiné dans les couches 2, 3 et 4** si :



• Il traverse le dioptre (3) / (2) et subit une réfraction. On en déduit donc : $\theta \geq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$

AN : $\theta \geq 6,6^\circ$

• Il subit une réflexion totale au niveau du dioptre (2) / (1). On en déduit donc : $i_2 \geq \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$

On en déduit donc : $\sin(i_2) \geq \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow v_3 \cdot \sin(i_2) \geq v_3 \cdot \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow v_2 \cdot \sin(i_3) \geq v_3 \cdot \frac{v_2}{v_1}$

$\Leftrightarrow \sin(i_3) \geq \frac{v_3}{v_1} \Leftrightarrow i_3 \geq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right) \Leftrightarrow 90^\circ - \theta \geq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right) \Leftrightarrow \theta \leq 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right)$

AN : $\theta \leq 11,4^\circ$

Une fois totalement réfléchi sur le dioptre (2)/(1), l'onde est réfléchi avec l'angle i_2 , elle est ensuite réfractée dans le milieu (3) avec l'angle i_3 . Sa propagation vers le milieu (4) puis (5) se fait de la même manière puisque $v_4 = v_2$ et $v_5 = v_1$, ainsi l'onde reste confinée dans les couches 2, 3, 4.

L'onde reste confinée dans les couches 2, 3 et 4 si :

$90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_3}{v_2}\right) \leq \theta \leq \arcsin\left(\frac{v_3}{v_1}\right)$ soit $6,6^\circ \leq \theta \leq 11,4^\circ$

8. Lorsque la vitesse du son varie de manière continue dans un milieu, la direction de l'onde sonore change progressivement. Il n'y a alors plus de rupture de pente comme dans le cas d'un dioptre net, mais une variation continue de l'orientation du rayon, on obtient alors l'allure suivante :



B - A l'écoute d'un rorqual

9. Système : {rorqual}

Référentiel : référentiel terrestre associé au repère d'axe (Ox) porté par un vecteur unitaire \vec{e}_x décrit dans l'énoncé, et à l'horloge d'instant initial défini dans l'énoncé.

D'après l'énoncé, le système admet une vitesse constante telle que : $\vec{v}_R = v_R \cdot \vec{e}_x$. L'abscisse v_{Rx} du vecteur vitesse du rorqual est donc égale à v_R , ce qu'on peut noter : $v_{Rx} = v_R$

On intègre v_{Rx} pour obtenir l'abscisse x_R du rorqual : $x_R(t) = v_R \cdot t + cste$

Or, le rorqual est initialement à l'abscisse : $x_R(t = 0) = D$ d'après l'énoncé.

De plus, $x_R(t = 0) = v_R \times 0 + cste = cste$; on en déduit donc que : $cste = D$

On obtient l'équation horaire du rorqual : $x_R(t) = v_R \cdot t + D$.

10. Dans le même référentiel, on étudie désormais le système {bateau}.

D'après l'énoncé, il admet une accélération constante telle que : $\vec{a}_B = a_B \cdot \vec{e}_x$. L'abscisse a_{Bx} du vecteur accélération vaut donc $a_{Bx} = a_B$.

On intègre a_{Bx} pour obtenir l'abscisse v_{Bx} du bateau : $v_{Bx} = a_B \cdot t + cste'$

Or, le bateau est initialement à l'arrêt : $v_{Bx}(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé.

De plus, $v_{Bx}(t = 0) = a_B \times 0 + cste' = cste'$; on en déduit donc que : $cste' = 0$

On a donc finalement : $v_{Bx} = a_B \cdot t$

On intègre v_{Bx} pour obtenir l'abscisse x_B du bateau : $x_B(t) = \frac{1}{2} a_B \cdot t^2 + cste''$

Or, le bateau est initialement à l'abscisse : $x_B(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé.

De plus, $x_B(t = 0) = \frac{1}{2} a_B \times 0^2 + cste'' = cste''$; on en déduit donc que : $cste'' = 0$

On obtient l'équation horaire du bateau : $x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot t^2$.

11. Le bateau coupe son moteur au bout d'une durée Δt telle que $x_R(\Delta t) - x_B(\Delta t) = d$

$$\Rightarrow v_R \cdot \Delta t + D - \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot \Delta t^2 = d$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot a_B \cdot \Delta t^2 + v_R \cdot \Delta t + (D - d) = 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré, dont on détermine les racines à la calculatrice :

$$\underline{AN} : -1,5 \cdot \Delta t^2 + 2,0 \cdot \Delta t + 800 = 0$$

on obtient deux racines : $\Delta t_1 = -22 \text{ s}$ et $\Delta t_2 = 23 \text{ s}$

Seule la racine positive est pertinente, car la durée cherchée est nécessairement positive :

$$\underline{\Delta t = \Delta t_2 = 23 \text{ s}}$$