BCPST 1 : DS 08 - PHYSIQUE – 14/05/25 - CORRIGE

EXERCICE 1 : BARRIERES DE PROTECTION POUR CRAPAUD

1- **Système :** {Crapaud} de masse *m*, assimilé à son centre de masse G

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Dans le repère (O, $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z}$), le système subit une accélération $\vec{a}_G$ verticale descendante de valeur constante g, ce qui peut s'écrire $\boxed{\vec{a}_G = -g \times \overrightarrow{e_z}}$.

2- • ***Coordonnées du vecteur accélération*** :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

• ***Coordonnées du vecteur vitesse*** : Par définition, $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$. Autrement dit, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_G$ en intégrant celles du vecteur accélération $\vec{a}_G$. On obtient donc :

$$\vec{v}_G \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -g \times t + C_2 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration obtenues à partir des conditions initiales concernant $\vec{v}_G$

Or, à t = 0, le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ a pour coordonnées :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \times \cos(\alpha) = C_1 \\ v_{z0} = v_0 \times \sin(\alpha) = -g \times 0 + C_2 = C_2 \end{cases}$$

Finalement, les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\boxed{\vec{v}_G \begin{cases} v_x = v_0 \times \cos(\alpha) & (1) \\ v_z = -g \times t + v_0 \times \sin(\alpha) & (2) \end{cases}}$$

• ***Coordonnées du vecteur position*** : Par définition, $\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$. Autrement dit, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en intégrant celles du vecteur vitesse $\vec{v}_G$. On obtient donc :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = v_0 \times \cos(\alpha) \times t + C_3 \\ z = -g \times \frac{t^2}{2} + v_0 \times \sin(\alpha) \times t + C_4 \end{cases}$$

où C_3 et C_4 sont deux constantes d'intégration qui s'identifient aux conditions initiales concernant $\overrightarrow{OG}$

Or, à t = 0, le vecteur position $\overrightarrow{OG}_0$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 = v_0 \times \cos(\alpha) \times 0 + C_3 = C_3 \\ y_0 = 0 = -g \times \frac{0^2}{2} + v_0 \times \sin(\alpha) \times 0 + C_4 = C_4 \end{cases}$$

Finalement, les coordonnées du vecteur position sont :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = v_0 \times \cos(\alpha) \times t & (3) \\ z = -g \times \frac{t^2}{2} + v_0 \times \sin(\alpha) \times t & (4) \end{cases}}$$

3- A la date t_{saut} à laquelle le crapaud finit son saut, l'altitude atteinte vaut <u>$z(t_{saut}) = 0$</u>.

D'après l'équation horaire ***(4)***, on en déduit :

$$0 = -g \times \frac{{t_{saut}}^2}{2} + v_0 \times \sin(\alpha) \times t_{saut} \quad \leftrightarrow \quad 0 = \left(-g \times \frac{t_{saut}}{2} + v_0 \times \sin(\alpha)\right) \times t_{saut}$$

La solution $t_{saut} = 0$ s correspond au début du saut, la fin du saut correspond alors à :

$$-g \times \frac{t_{saut}}{2} + v_0 \times \sin(\alpha) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{t_{saut} = \frac{2\, v_0 \times \sin(\alpha)}{g}}$$

4- Le crapaud étant initialement à la position $x_0 = 0$, la longueur *d* du saut s'identifie à l'abscisse x_{saut} de la position atteinte par le crapaud pour la date t_{saut} exprimée précédemment. D'après l'équation horaire ***(3)***, on a :

$$d = x(t_{saut}) \quad \leftrightarrow \quad d = v_0 \times \cos(\alpha) \times \frac{2\, v_0 \times \sin(\alpha)}{g} \quad \leftrightarrow \quad d = \frac{2\, {v_0}^2 \times \cos(\alpha) \times \sin(\alpha)}{g}$$

Soit finalement : $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{d \times g}{2\cos(\alpha) \times \sin(\alpha)}}}$

5- D'après l'énoncé, les crapauds peuvent faire des sauts d'une longueur égale à 20 fois leur taille ; or, la taille moyenne d'un crapaud est une dizaine de centimètres.

On en déduit donc $\underline{d}$ = 20 × 10 cm = $2{,}0.10^2$ cm = <u>2,0 m.</u>

<u>AN</u> : $v_0 = \sqrt{\dfrac{2{,}0 \times 9{,}81}{2\cos(45) \times \sin(45)}}$ soit **<u>v_0 = 4,4 m.s^{-1}</u>**.

6- Si le crapaud réalise un saut vertical, alors <u>l'angle α vaut 90 °</u>. Les coordonnées du vecteur vitesse deviennent alors :

$$\vec{v}_G \begin{cases} v_x = v_0 \times \cos(90°) \\ v_z = -g \times t + v_0 \times \sin(90°) \end{cases} \qquad soit\ \ \vec{v}_G \begin{cases} v_x = 0 \\ v_z = -g \times t + v_0 \end{cases}$$

<u>A la date t_{MAX} pour laquelle le crapaud atteint son altitude maximale z_{MAX}, la projection verticale de la vitesse du crapaud est nulle</u>, donc $v_z(t_{MAX}) = 0$. On en déduit donc :

$$v_z(t_{MAX}) = 0 = -g \times t_{MAX} + v_0 \quad \leftrightarrow \quad t_{MAX} = \frac{v_0}{g}$$

L'<u>altitude z_{MAX} atteinte par le crapaud</u> est alors :

$$z_{MAX} = z(t_{MAX}) = -g \times \frac{t_{MAX}^2}{2} + v_0 \times t_{MAX} \quad \leftrightarrow \quad z_{MAX} = -\frac{g}{2} \times \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} \quad soit \quad \boxed{\boldsymbol{z_{MAX} = \frac{{v_0}^2}{2\,g}}}$$

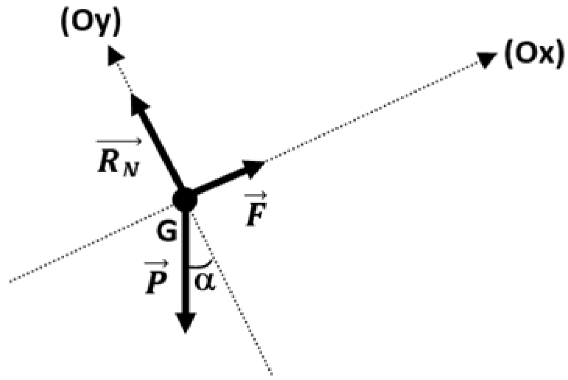
7- La hauteur H_{MIN} de la barrière qui permettra d'arrêter les crapauds les plus puissants sautant verticalement avec la vitesse v_0 = 4,4 m.s^{-1} s'identifie à z_{MAX}.

AN : $H_{MIN} = \dfrac{4{,}4^2}{2 \times 9{,}81}$ $\quad soit\ \underline{\boldsymbol{H_{MIN} = 0{,}99\ m}}$

8- Les barrières mesurent 50 à 60 cm de haut : elles ont donc une <u>hauteur nettement inférieure à 1,0 m</u>, hauteur qui ne sera jamais atteinte par les crapauds.

En effet, lorsque les crapauds sautent, *leur saut n'est pas vertical mais oblique*, ce qui diminue la hauteur du saut ; d'autre part, cette valeur maximale de 1,0 m *ne concerne que les crapauds les plus puissants*, ce qui n'est pas le cas de tous les crapauds. Ainsi, la barrière constitue une protection efficace pour les crapauds, à l'exception de rares individus puissants pouvant réaliser un saut quasi vertical.

EXERCICE 2 : LANCER D'UN PALET



1. *<u>Système</u>* : Le <u>palet</u> assimilé à son centre de masse G.

   <u>Référentiel</u> : référentiel <u>terrestre</u> supposé <u>galiléen</u>, la durée de l'expérience étant <u>très courte</u> devant la durée d'une journée.

   <u>Bilan des forces</u> :
   - son <u>poids</u> $\vec{P} = m\vec{g}$;
   - la <u>réaction normale</u> du sol $\overrightarrow{R_N}$;
   - la <u>force de propulsion</u> $\vec{F}$;

---

2. Dans un <u>référentiel galiléen</u>, la <u>dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement</u> $\vec{p}$ est égale à la <u>somme des forces</u> s'exerçant sur le point matériel M, ce qui se note : $\sum_i \boldsymbol{\vec{F}_{i,ext}} = \boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dt}}$.

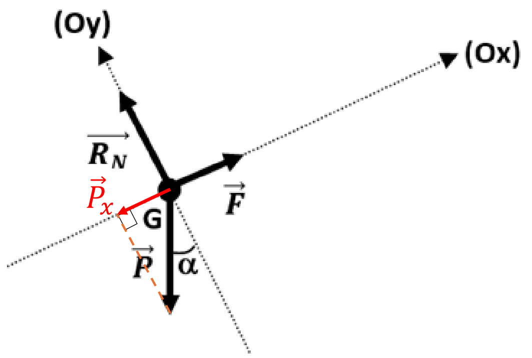
   Par définition, $\underline{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ avec $\underline{m = cte}$ pour un système fermé. Alors :

$$\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{a} + 0 \times \vec{v} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i \boldsymbol{\vec{F}_{i,ext} = m \cdot \vec{a}}}$$

avec $\vec{a}$ accélération du centre de masse G dans le référentiel d'étude.

---

3. Le palet ayant une masse constante, le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit : $\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F} = m.\overrightarrow{a_1}$



La projection de cette loi sur l'axe *(Ox)* conduit à :

$$P_x + R_{Nx} + F_x = ma_x$$
$$\Leftrightarrow \quad -mg\sin\alpha + 0 + F = ma_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F = m(a_1 + g\sin\alpha)}}$$

---

4. Pour répondre à cette question, il faut d'abord déterminer l'expression de a_1 en fonction de v_{max} et de Δt :

- La coordonnée a_x du vecteur accélération selon l'axe *(Ox)* vaut $a_x = a_1$.
- On obtient la coordonnée v_x du vecteur vitesse selon l'axe *(Ox)* en intégrant a_x, ce qui donne : $v_x = a_1.t + C_1$ avec C_1 une constante d'intégration obtenue à l'aide des conditions initiales.
- Or, $v_x(t=0) = 0 = a_1 \times 0 + C_1 = C_1$.
- Finalement, $v_x = a_1.t$

diviser par 3,6

- Or, à la date t = Δt = 0,50 s, on veut que le palet atteigne la vitesse $v_{max} = 183{,}67\ km \cdot h^{-1}$ = 51,019 $m.s^{-1}$
- On en déduit donc que $v_{max} = a_1.\Delta t$, c'est-à-dire : $a_1 = \dfrac{v_{max}}{\Delta t}$ (Attention à convertir

Ainsi, d'après la question **3.**, $\boxed{\boldsymbol{F_{record} = m \times \left(\dfrac{v_{max}}{\Delta t} + g \times \sin(\alpha)\right)}}$

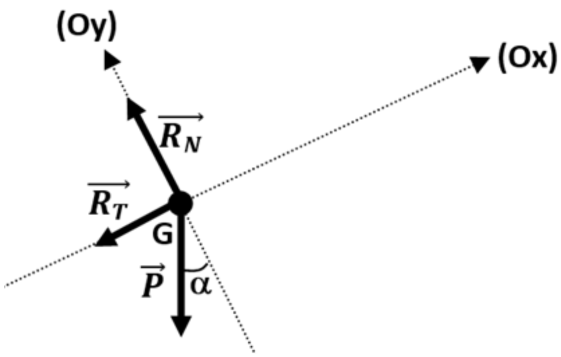
A.N : $\boldsymbol{F_{record} = 0{,}160 \times \left(\dfrac{51{,}019}{0{,}50} + 9{,}80 \times \sin(20)\right)}$ soit **F_{record} = 17 N**

Autre méthode pour déterminer l'expression de a_1 : par définition, $\vec{a}_1 = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, ce qui signifie que l'accélération est la variation temporelle de la vitesse. Or, ici, le système est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, ce qui signifie que son accélération est constante. Pour la calculer, on peut donc se baser sur la variation de vitesse subie par le système (qui passe d'une vitesse v_0 nulle à une vitesse $v_{max} = 183{,}67\ km \cdot h^{-1}$ selon l'axe *(Ox)*) pendant la durée Δt = 0,50 s. On peut donc écrire que $a_1 = \dfrac{v_{max} - v_0}{\Delta t}$, soit $a_1 = \dfrac{v_{max}}{\Delta t}$.

---

5. Bilan des forces : - son poids $\vec{P}$;
- la réaction normale du plan $\overrightarrow{R_N}$;
- la réaction tangentielle du sol $\overrightarrow{R_T}$

On représente ces forces sur le schéma ci-contre, avec le centre d'inertie G comme point d'application.



---

6. Avec un raisonnement analogue à celui de la première phase, on applique le PFD pour déterminer a_2 du palet.

La masse du palet étant constante, la 2ème loi de Newton s'écrit :

$\boldsymbol{\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} = m.\overrightarrow{a_2}}$

La projection de la 2ème loi de Newton sur les axes *(Ox)* et *(Oy)* conduit à :

$$\begin{cases} P_x + R_{Nx} + R_{Tx} = ma_x \\ P_y + R_{Ny} + R_{Ty} = ma_y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -mg\sin\alpha + 0 - R_T = ma_2 \\ -mg\cos\alpha + R_N + 0 = 0 \ \text{(pas de mouvement selon } (Oy)) \end{cases}$$

Remarque : R_T et R_N représentent les normes des deux vecteurs, et donc sont toutes deux positives.

Le système étant en mouvement, d'après l'énoncé, les lois de Coulomb permettent d'affirmer que $R_T = f_D R_N$ avec $R_N = mg\cos\alpha$ d'après la projection de PFD selon *(Oy)*. Il vient alors que $R_T = f_D mg\cos\alpha$.

En remplaçant R_T par son expression dans l'équation résultant de la projection de PFD selon *(Ox)*, on obtient :

$$-mg\sin\alpha - mf_D g\cos\alpha = ma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_2 = -g(\sin\alpha + f_D\cos\alpha)}}$$

A.N : $\boldsymbol{a_2 = -9{,}8(\sin 20 + 0{,}050\cos 20)}$ soit **a_2 = – 3,8 m.s^{-2}**

---

7. • ***Coordonnée v_x du vecteur vitesse $\vec{v}$ du palet*** :
- La coordonnée a_x du vecteur accélération selon l'axe *(Ox)* vaut $a_x = a_2$.
- On obtient la coordonnée v_x du vecteur vitesse selon l'axe *(Ox)* en intégrant a_x, ce qui donne : $v_x = a_2.t + C_2$ avec C_2 une constante d'intégration obtenue à l'aide des conditions initiales.

- Or, $v_x(t=0) = v_0 = a_2 \times 0 + C_2 = C_2$.
- Finalement, $\boxed{v_x = a_2.t + v_0}$ **(1)**

• ***Coordonnée x du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du palet*** :

- On obtient la coordonnée x du vecteur position du palet selon l'axe *(Ox)* en intégrant v_x, ce qui donne :

$x = \frac{1}{2} a_2.t^2 + v_0.t + C_3$ avec C_3 une constante d'intégration obtenue à l'aide des conditions initiales.

- Or, $x(t=0) = x_0 = \frac{1}{2} a_2 \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_3 = C_3$.
- Finalement, $\boxed{x = \frac{1}{2} a_2.t^2 + v_0.t + x_0}$ **(2)**

---

8. Le palet s'arrêtera à une date $\underline{t = t_A}$ telle que $\underline{v(t_A) = 0}$. D'après **(1)** : $0 = a_2 \cdot t_A + v_0 \Leftrightarrow t_A = -\frac{v_0}{a_2}$

On détermine alors la position x_A du palet en remplaçant t_A par son expression dans **(2)** :

$$x_A = \frac{1}{2} a_2 \cdot t_A^2 + v_0 \cdot t_A + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_A = \frac{1}{2} a_2 \cdot \left(\frac{v_0}{-a_2}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{-a_2} + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_A = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_2} + x_0$$

Or, la distance d parcourue par le palet est égale à la différence entre la position finale x_A et la position initiale x_0 :

$$d = x_A - x_0 = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_2} + x_0 - x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_2}}}$$

<u>A.N</u> avec $v_{max} = 51{,}019\ m.s^{-1}$ $\quad \boldsymbol{d = -\frac{51{,}019^2}{2 \times (-3{,}8)}}$ $\quad$ soit $\underline{\boldsymbol{d = 3{,}4.10^{2}\ m}}$

---

9. Supposons que le palet reste <u>immobile.</u>

Dans ce cas, la projection du PFD selon l'axe *(Ox)* devient : $-mg\sin\alpha + 0 - R_T = 0$ soit $\boxed{\boldsymbol{R_T = mg\sin\alpha}}$.

De plus, la projection du PFD selon l'axe *(Oy)* donne : $\boxed{\boldsymbol{R_N = mg\cos\alpha}}$.

<u>AN</u> → $\mathbf{R_T = 0{,}160 \times 9{,}80 \times \sin(20\ °)}$ soit $\underline{\mathbf{R_T = 0{,}54\ N}}$

→ $\mathbf{R_N = 0{,}160 \times 9{,}80 \times \cos(20\ °)}$ soit $\underline{\mathbf{R_N = 1{,}5\ N}}$

Or, <u>d'après les lois de Coulomb</u>, pour une immobilité, on devrait avoir $\underline{\boldsymbol{R_T \leq f_s R_N}}$

<u>AN</u> → $\mathbf{f_S \times R_N = 0{,}055 \times 1{,}5}$ soit $\underline{\mathbf{f_S R_N = 0{,}081\ N}}$

On constate donc que $\boldsymbol{R_T > f_s R_N}$, ce qui est en contradiction avec la loi de Coulomb. Le palet ne restera donc pas immobile et redescendra la pente.

<u>Autre méthode</u> : On peut déterminer l'angle α' maximal que peut avoir la pente pour que le palet reste immobile. Tant que le palet est immobile, <u>d'après la projection du PFD sur l'axe *(Ox)*</u>, $\boldsymbol{R_T = mg\sin\alpha'}$.

De plus, <u>d'après les lois de Coulomb</u>, pour une immobilité, on a $\underline{\boldsymbol{R_T \leq f_s R_N}}$ avec $\boldsymbol{R_N = mg\cos\alpha'}$ d'après la projection du PFD selon *(Oy)*.

<u>On obtient donc</u> : $\boldsymbol{mg\sin\alpha' \leq mgf_S\cos\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha' \leq f_s \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{\alpha' \leq \arctan f_s}}$

<u>*A.N*</u> : $\boldsymbol{\alpha' \leq \arctan 0{,}055 \leq \underline{3{,}1°}}$:

<u>Conclusion</u> : le palet est donc immobile si la pente est inférieure à 3,1°. Or, ici, elle vaut 20° : on en déduit donc que le palet ne peut pas rester immobile et qu'il rescendra le long de la pente.

<u>Autre méthode-bis</u> : Supposons que le palet redescend. Dans ce cas, le PFD suivant l'axe *(Ox)* s'écrit :

$$\boldsymbol{-m \cdot g \cdot \sin\alpha + R_T = m \cdot a_3}$$

avec R_T, la norme de la force tangentielle s'exerçant sur le palet, colinéaire à son mouvement et dirigée selon l'axe *(Ox)*, mais de sens opposé car elle s'oppose au déplacement du palet, et a_3, la nouvelle accélération du palet.

En supposant que le système est en <u>mouvement</u>, d'après l'énoncé, les lois de Coulomb permettent d'affirmer que $\underline{\boldsymbol{R_T = f_D R_N}}$ avec $\underline{\boldsymbol{R_N = mg\cos\alpha}}$ d'après la projection de PFD selon *(Oy)*. Il vient alors : $\underline{\boldsymbol{R_T = f_D mg\cos\alpha}}$.

$$\boldsymbol{m \cdot a_3 = -m \cdot g \cdot \sin\alpha + f_D mg\cos\alpha} \quad \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{a_3 = -g \cdot \sin\alpha + f_D \cdot g \cdot \cos\alpha}}$$

<u>*A.N*</u> : $\boldsymbol{a_3 = -9{,}81 \cdot \sin 20 + 0{,}050 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 20 = -2{,}9\ m \cdot s^{-2}} < 0$

Comme le palet subit une accélération <u>négative</u>, il <u>redescend</u> le long du plan incliné, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de départ.