BCPST 1 : Devoir Surveillé n°9 - PHYSIQUE - Corrigé

Mercredi 04 Juin 2025 – 1h30

EXERCICE 1 : MESURE DE MASSE EN APESANTEUR (~30 MIN)

1. Système : {Point matériel M, de masse m} ; Référentiel : terrestre, supposé galiléen.
Bilan des forces s'exerçant sur ce système :

- Son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$
- La force de rappel du ressort : $\vec{f} = -k(z - \ell_0)\,\vec{e_z}$

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), ou deuxième loi de Newton, appliqué en référentiel galiléen, le système étant de lasse constante : $m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

Le système est contraint à se déplacer verticalement, ainsi : $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e_z}$

Le PFD devient : $$m\ddot{z}\,\vec{e_z} = -mg\,\vec{e_z} - k(z - \ell_0)\,\vec{e_z}$$

En projetant suivant l'axe (Oz) : $m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m}\ell_0}$

On obtient ainsi *l'équation différentielle du mouvement*.

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 définie par la relation : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

---

2. A l'équilibre, le système est au repos, sa vitesse et son accélération sont donc nulles : ainsi, l'équation différentielle devient :

$$\frac{k}{m} z_{eq} = -g + \frac{k}{m}\ell_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

Commentaires : • A l'équilibre, $z_{eq} < \ell_0$, ce qui signifie que le ressort vertical est comprimé par rapport à sa longueur au repos.
• Le ressort est d'autant plus comprimé que la masse m est plus grande et que la constante de raideur k est faible.

---

3. Par définition, la période propre des oscillations vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

---

4. L'équation obtenue : $\ddot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m}\ell_0$ est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants avec second membre.

On cherche les solutions de la forme : $z(t) = z_h(t) + z_p(t)$

- $z_h(t)$: solution de l'équation homogène : $\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$; on reconnaît une équation d'oscillateur harmonique dont les solutions sont de la forme : $z_h(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$
- $z_p(t)$: solution particulière, de la même forme que le second membre, donc constante ; il s'agit donc de résoudre : $\frac{k}{m} z_p = -g + \frac{k}{m}\ell_0$, ce qui conduit à $z_p = -\frac{mg}{k} + \ell_0$. On constate donc que : $z_p(t) = z_{eq}$;

Par conséquent, $z(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + z_{eq}$

On détermine **A** et **B** grâce aux conditions initiales :

• « *La longueur initiale du ressort est sa longueur à l'équilibre* ». Donc $\boldsymbol{z(t=0) = z_{eq}}$.
Or, $\boldsymbol{z(t=0) = A.\cos(0) + B.\sin(0) + z_{eq} = A + z_{eq}}$
On en déduit donc que $\boldsymbol{A + z_{eq} = z_{eq}}$ soit **A = 0**.

• « *On communique initialement au point matériel une vitesse v_0 ascendante* ». Donc $\boldsymbol{\dot{z}(t=0) = v_0}$.

Or, $\boldsymbol{\dot{z}(t) = -A.\sqrt{\frac{k}{m}}.\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B.\sqrt{\frac{k}{m}}.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$

Donc, $\boldsymbol{\dot{z}(t=0) = -0 \times \sqrt{\frac{k}{m}} \times \sin(0) + B \times \sqrt{\frac{k}{m}} \times \cos(0) = B \times \sqrt{\frac{k}{m}}}$

On en déduit donc que $\boldsymbol{B \times \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0}$ soit $\boldsymbol{B = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

Pour conclure : $$\boxed{z(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \times \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + z_{eq} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \times \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

---

5. La période des oscillations précédemment établie **ne dépend que de la masse *m* du système fixée à l'extrémité du ressort et de la constante de raideur *k* du ressort, mais pas de *g*** : ainsi, elle reste valable pour le système placé dans l'ISS.

---

6. On a : $\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}}$ => $\boxed{\boldsymbol{m_0 = k\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2}}$ → ***AN*** : $\boldsymbol{m_0 = 606 \times \left(\frac{1{,}28}{2\pi}\right)^2}$ soit **m_0 = 25,1 kg**

---

7. Quand l'astronaute s'assoit sur la chaise, la masse à prendre en compte est $\boldsymbol{m_0 + m_A}$. On a donc :

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_A}{k}}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m_0 + m_A = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m_A = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - m_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m_A = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - k\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{m_A = \frac{k}{4\pi^2}(T^2 - {T_0}^2)}}$$

→ ***AN*** : $\boldsymbol{m_A = \frac{606}{4\pi^2}(2{,}33^2 - 1{,}28^2)}$ soit **m_A = 58,2 kg**

EXERCICE 2 : BALLON STRATOSPHERIQUE (~ 60 MIN)

1- Système : Ballon-sonde ; Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Par définition, $\vec{P}$ **= masse totale du système ×** $\vec{g}$

C'est-à-dire, au moment du décollage à $z = 0$, $\boxed{\vec{P} = (m_b + m_h) \times \vec{g}}$

2- La poussée d'Archimède subie par le ballon est égale à la résultante des forces pressantes exercées par le fluide dans lequel est immergé le ballon, c'est-à-dire par l'air.

D'après le théorème d'Archimède, la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ subie par le système de la part de l'air est égale à l'opposé du poids d'air déplacé par le système :

$\vec{\pi}$ **= – masse d'air déplacé par le système ×** $\vec{g}$ soit $\boxed{\vec{\pi} = -\rho_0 \times V_0 \times \vec{g}}$

3- Pour que le ballon puisse s'élever dans les airs depuis sa base de lancement, il faut qu'il ait une flottabilité positive, c'est-à-dire que **la poussée d'Archimède l'emporte sur le poids** : $\pi > P$.

Autre rédaction :

En supposant le système de masse totale constante au moment du décollage, d'après le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P} + \vec{\pi} = (m_b + m_h) \cdot \vec{a}$ avec $\vec{a}$ l'accélération du centre de masse du système

En projetant cette relation sur l'axe (Oz) vertical ascendant :

$-P + \pi = m.a_Z$ avec a_Z la coordonnée du vecteur accélération selon l'axe (Oz)

Si on souhaite que le ballon décolle, il faut que $a_Z > 0$, ce qui implique que $\pi > P$.

Pour que le ballon puisse s'élever dans les airs depuis sa base de lancement, il faut donc que :

$$\rho_0 \times V_0 \times g > (m_b + m_h) \times g \quad \text{soit} \quad V_0 > \frac{m_b + m_h}{\rho_0}$$

Le ballon doit donc avoir le volume minimal : $\boxed{V_{0,min} = \frac{m_b + m_h}{\rho_0}}$.

AN → $V_{0,min} = \frac{1{,}20.10^3 + 1{,}80.10^3}{1{,}23}$ soit $\underline{V_{0,min} = 2{,}44.10^{3}\ m^3}$

Le ballon-sonde lancé depuis la base de Kiruna avait un volume initial $V_0 = 1{,}08.10^4\ m^3$ supérieur à au volume minimal calculé précédemment. Il a donc bien décollé.

4- Enoncé de la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides (RFSF) :

Pour un fluide de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur (Oz) étant un axe vertical ascendant : $\frac{dP}{dz} = -\rho.g$

5- # D'après la relation fondamentale de la statique des fluides (RFSF), $dP = -\rho_{air}.g.dz$ avec ρ_{air} la masse volumique de l'air.

Or, la masse volumique ρ_{air} de l'air est reliée à la masse m_{air} d'air, au volume V_{air} d'air, à la quantité de matière n_{air} d'air, à la masse molaire M_a d'air, à la pression **P** de l'air et à sa température **T** par les relations :

$$\rho_{air} = \frac{m_{air}}{V_{air}} \Rightarrow \rho_{air} = \frac{n_{air} \times M_a}{V_{air}} \Rightarrow \rho_{air} = \frac{P \times M_a}{R \times T} \Rightarrow \rho_{air} = \frac{P \times M_a}{R \times (T_0 - b \times z)}$$

En assimilant l'air à un gaz parfait, il vérifie l'équation d'état des gaz parfaits $P.V_{air} = n_{air}.R.T$

La RFSF devient : $\mathbf{dP} = -\dfrac{P \times M_a}{R \times (T_0 - b \times z)} \times \mathbf{g} \times \mathbf{dz}$

On sépare les variables « pression P» et « altitude z » : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{M_a \times g}{R} \times \dfrac{dz}{T_0 - b \times z}$

On intègre cette relation entre un point M quelconque (pression P, altitude z) et un point de référence (Pression P_0 = 1,013.10 ^{5} Pa, altitude z = 0).

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\int_{z=0}^{z} \frac{M_a . g}{R} \times \frac{dz}{T_0 - b \times z} \quad \leftrightarrow \quad \int_{P_0}^{P} \frac{1}{P} dP = -\frac{M_a . g}{R} \int_{z=0}^{z} \frac{1}{T_0 - b \times z} . dz$$

R *est une constante,* $\mathbf{M_a}$ *est une constante (si on suppose que l'air a une composition qui ne change pas avec l'altitude) et* **g** *est une constante car on suppose le champ de pesanteur uniforme. On peut donc sortir ces 3 constantes de l'intégrale.*

$$[\ln(P)]_{P_0}^{P} = -\frac{M_a . g}{R} . \left[-\frac{1}{b} . \ln(T_0 - b \times z)\right]_0^z \quad \leftrightarrow \quad \ln(P) - \ln(P_0) = \frac{M_a . g}{R . b} . (\ln(T_0 - b \times z) - \ln(T_0))$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_a . g}{R . b} . \ln\left(\frac{T_0 - b \times z}{T_0}\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{P}{P_0} = \exp\left[\frac{M_a . g}{R . b} . \ln\left(1 - \frac{b}{T_0} \times z\right)\right]$$

$\boxed{P = P_0 . \left(1 - \dfrac{b}{T_0} \times z\right)^{\frac{M_a . g}{R . b}}}$ ce qui est bien de la forme $P = P_0 . \left(1 - \dfrac{b}{T_0} \times z\right)^{\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{M_a . g}{R . b}$

6- # De même que précédemment : $\dfrac{dP}{dz} = -\rho_{air} \times g$ avec $\rho_{air} = \dfrac{P \times M_a}{R \times T_1}$ soit $\dfrac{dP}{dz} = -\dfrac{P \times M_a}{R \times T_1} \times g$.

L'équation différentielle vérifiée par la pression ***P*** s'écrit donc : $\dfrac{dP}{dz} + \dfrac{M_a \times g}{R \times T_1} \times P = 0$.

Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$\boxed{\dfrac{dP}{dz} + \dfrac{1}{H} \times P = 0}$ avec $\mathbf{H} = \dfrac{R \times T_1}{M_a \times g}$ une hauteur caractéristique du problème

---

7- La solution de cette équation différentielle est de la forme : $\mathbf{P(z) = K \times e^{-\frac{z}{H}}}$ avec **K** une constante qu'on détermine grâce aux conditions aux limites.

Or, on sait que la basse stratosphère commence à une altitude z_1 = 12 km pour laquelle on connaît la pression P_1. On a donc : $\mathbf{P_1 = P(z = z_1) = K \times e^{-\frac{z_1}{H}}}$ soit $\mathbf{K = P_1 \times e^{\frac{z_1}{H}}}$

Donc $\mathbf{P(z) = P_1 \times e^{\frac{z_1}{H}} \times e^{-\frac{z}{H}}}$ ou encore, $\boxed{P(z) = P_1 \times e^{\frac{z_1 - z}{H}}}$

8- Lorsqu'on s'élève d'une hauteur H depuis une altitude z_{ref} donnée, la pression a diminué de 63 % par rapport à celle qu'elle valait à l'altitude z_{ref}.

Démonstration (non attendue) :

Pour z = z_{ref}, $\mathbf{P(z = z_{ref}) = P_1 \times e^{\frac{z_1 - z_{ref}}{H}}}$

Pour z = z_{ref} + H, $\mathbf{P(z = z_{ref} + H) = P_1 \times e^{\frac{z_1 - z_{ref} - H}{H}}}$ soit

$$\mathbf{P(z = z_{ref} + H) = P(z = z_{ref}) \times e^{\frac{-H}{H}}}$$

$$\mathbf{P(z = z_{ref} + H) = P(z = z_{ref}) \times e^{-1}}$$

$$P(z = z_{ref} + H) = P(z = z_{ref}) \times 0,37$$

A l'altitude z_{ref} + H, la pression n'est plus égale qu'à 37 % de ce qu'elle était à l'altitude z_{ref}, ce qui signifie bien qu'en s'élevant d'une altitude H, la pression a diminué de 63 % …

9- On cherche z_2 telle que $V(z = z_2) = V_{max} = \frac{m_h \times M_a}{M_h \times \rho_a(z_2)}$. On en déduit donc la masse volumique $\rho_a(z_2)$ à cette altitude : $\boxed{\rho_a(z_2) = \frac{m_h \times M_a}{M_h \times V_{max}}}$.

AN → $\rho_a(z_2) = \frac{1,80.10^3 \times 29,0}{4,0 \times 1,96.10^5}$ soit **$\rho_a(z_2) = 0,067$ kg.m^{-3}**

D'après le graphique du ***Document 3***, la masse volumique de l'air vaut 0,067 kg.m^{-3} à une **altitude z_2 située aux alentours de 22000 mètres, donc dans la stratosphère**.

10- Pour calculer les normes du poids et de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le ballon à cette altitude z_2, on utilise les relations établies aux questions **1-** et **2-** :

$$\boxed{P = (m_b + m_h) \times g}$$

AN → $P(z = z_2) = (1,20.10^3 + 1,80.10^3) \times 9,81$ soit **$P(z = z_2) = 2,94.10^4$ N**

$$\boxed{\pi = \rho_a(z_2) \times V_{max} \times g}$$

AN → $\pi(z = z_2) = 0,067 \times 1,96.10^5 \times 9,81$ soit **$\pi(z = z_2) = 1,3.10^5$ N**

La poussée d'Archimède étant supérieure au poids, le ballon-sonde a une flottabilité positive et continue donc à avoir un **mouvement ascensionnel**.

11- Sur le graphique du ***Document 4***, on constate que lorsque le ballon évolue dans la troposphère, c'est-à-dire lorsque 0 < z < 12 km, le graphique z = f(t) (courbe noire) est une fonction affine, traduisant une **vitesse constante** pour le système ; c'est d'ailleurs aussi ce que confirme approximativement le graphique v = f(t) (courbe grise).

Le système ayant de plus une **trajectoire verticale**, on peut parler d'un **mouvement rectiligne uniforme** pour le ballon quand il évolue dans la troposphère.

12- Dans la troposphère, le ballon est soumis aux forces suivantes :

Son poids $\vec{P} = (m_b + m_h) \times \vec{g}$ **dont la norme est constante** car m_b, m_h et g sont des constantes durant cette phase de l'ascension ;

La force de frottement $\vec{F} = -k_0 \cdot v^2 \cdot \vec{u}_z$ **dont la norme augmente** car k_0 est une constante dans la troposphère mais car le système voit d'abord sa vitesse augmenter ;

La poussée d'Archimède exercée par l'air $\vec{\pi} = -\rho_a(z) \times V(z) \times \vec{g}$ **dont la norme est constante**. En effet : $\pi = \rho_a(z) \times V(z) \times g = \rho_a(z) \times \frac{m_h \times M_a}{M_h \times \rho_a(z)} \times g = \frac{m_h \times M_a}{M_h} \times g$ = constante

Au départ, la poussée d'Archimède (qui est la seule force verticale ascendante) l'emporte sur les deux autres forces qui sont verticales descendantes, ce qui explique le décollage du ballon. Mais au fur et à mesure de l'ascension toutes les forces restent constantes, sauf la force de frottement qui devient de plus en plus importante. **Il arrivera donc un moment où le frottement et le poids compenseront exactement la poussée d'Archimède**. D'après la 1ère loi de Newton, c'est à partir de ce moment précis que le système cessera d'accélérer et qu'il sera animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

13- Quand le système atteint sa vitesse limite, alors d'après la 1ère loi de Newton, il est soumis à des forces qui se compensent : $\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{F} = \vec{0}$

En projetant cette relation sur l'axe (Oz) vertical ascendant :

$$-P + \rho_a(z) \times V(z) \times g - k.v^2 = 0 \quad \text{avec } \mathbf{v} = v_{\ell,ref}$$

De plus, comme $P = (m_b + m_h) \times g$ et $V(z) = \dfrac{m_h \times M_a}{M_h \times \rho_a(z)}$, la relation précédente devient :

$$-(m_b + m_h) \times g + \frac{m_h \times M_a}{M_h} \times g - k.v^2 = 0$$

$$\left(\frac{m_h \times M_a}{M_h} - m_b - m_h\right) \times g - k.v_{\ell,ref}{}^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{v_{\ell,ref} = \sqrt{\left(\frac{m_h \times M_a}{M_h} - m_b - m_h\right) \times \frac{g}{k}}}$$

AN → $v_{\ell,ref} = \sqrt{\left(\dfrac{1{,}80.10^3 \times 29{,}0}{4{,}0} - 1{,}20.10^3 - 1{,}80.10^3\right) \times \dfrac{9{,}81}{2{,}05.10^3}}$ soit $v_{\ell,ref}$ **= 6,93 m.s⁻¹**

14- On calcule l'écart normalisé EN par la formule : $\boxed{EN = \dfrac{|v_{\ell,ref} - v_{\ell,exp}|}{u(v_{\ell,exp})}}$.

AN → $EN = \dfrac{|6{,}93 - 6{,}90|}{0{,}23}$ soit EN **= 0,13**

Cet écart normalisé inférieur à 2 permet de conclure à un bon accord entre l'expérience et la théorie. Le modèle choisi pour la force de frottement semble donc être le bon.