DM13 - MATHS
Corrigé
Vendredi 13 Juin 2025

Exercice 1

$$E(Y) = E(X + \sqrt{3}^{2X+1}) = E(X) + E(\sqrt{3}^{2X+1}) = np + E(\sqrt{3}^{2X+1})$$

Formule du transfert :

$$E(\sqrt{3}^{2X+1}) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sqrt{3}^{2k+1} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{3}^{2k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sqrt{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sqrt{3} (3p+1-p)^n = \sqrt{3} (2p+1)^n$$

Donc $\boxed{E(Y) = np + \sqrt{3}(2p+1)^n.}$

Exercice 2

(1.) $\frac{p}{2} \geq 0$ et $1-p \geq 0$ et : $\frac{p}{2} + 1 - p + \frac{p}{2} = 1 - p + p = 1$ ✓.

(2.) $E(X) = -1 \times \frac{p}{2} + 0 \times (1-p) + 1 \times \frac{p}{2}$ donc $\boxed{E(X) = 0}$

(3.) Formule du transfert,

$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{p}{2} + 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2}$ donc $\boxed{E(Y) = p}$

Exercice 3.

(1.) $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$. (Car il y a 6 voyelles : A-E-I-O-U-Y)

Il y a équiprobabilité et Ω est fini :

Ω est l'ensemble des 5-combinaisons d'un ensemble à 26 éléments donc $card(\Omega) = \binom{26}{5}$.

$\forall k \in X(\Omega)$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{card(X=k)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{6}{k}}{\binom{26}{5}}} = \frac{6!}{k!(6-k)!} \times \frac{5!\,21!}{26!}$$

(2.)

. Il y a 5 épreuves (choix d'un jeton) indépendantes.

. chaque épreuve a 2 issues dont le succès (avoir une voyelle) est de proba $\frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.

. X compte le nombre de voyelles (de succès)

Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{3}{13}\right)}$

Exercice 4.

$X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.

B_k = "on tire une blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage".

$(X=k) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$.

FPC : $P(X=k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k)$

$$= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)}$$

$$= \prod_{i=0}^{k-2} \frac{n-2-i}{n-i} \times \frac{2}{n-(k-1)} = \frac{2}{n-k+1} \times \prod_{i=0}^{k-2} \frac{n-(i+2)}{n-i}$$

$$\underset{i'=i+2}{=} \frac{\prod_{i=2}^{k} (n-i)}{\prod_{i=0}^{k-2} (n-i)} \times \frac{2}{n-k+1}$$

$$= \frac{(n-(k-1))(n-k)}{n \times (n-1)} \times \frac{2}{n-k+1}$$

$$= \frac{(n-k)\ (n-\cancel{k+1})}{n\,(n-1)} \times \frac{2}{n-\cancel{k+1}}$$

donc $\boxed{P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}$