Devoir Maison n° 11
Corrigé
lundi 19/05/2025

Exercice 1

$\mathcal{B}$ compte 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ donc il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour mq $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quelconques tq

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 \quad +3\lambda_3+3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3+2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$

$\forall u=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in\mathbb{R}$ tq
$$u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+\lambda_4 u_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = a \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = b \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +3\lambda_4 = c \\ \lambda_1 \quad +3\lambda_3+3\lambda_4 = d \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = a \\ -\lambda_4 = -a+b. \\ -\lambda_3+2\lambda_4 = -a+c \\ -\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4 = -a+d \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1)\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = a \\ (-1)\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4 = -a+d \\ (-1)\lambda_3+2\lambda_4 = -a+c \\ (-1)\lambda_4 = -a+b \end{cases}$$

(rg (S) = 4 donc S a une unique solution donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 = (1-9-3-1)a+(6+2+1)b+(2+1)c+(1)d = -12a+9b+3c+d \\ \lambda_2 = a-d+2\lambda_3+2\lambda_4 = (1+6+2)a+(-4-2)b+(-2)c-d = 9a-6b-2c-d \\ \lambda_3 = a-c+2\lambda_4 = 3a-2b-c \\ \lambda_4 = a-b. \end{cases}$$

donc $\boxed{\text{les coordonnées de } (a,b,c,d) \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont : } (-12a+9b+3c+d,\ 9a-6b-2c-d,\ 3a-2b-c,\ a-b)}$

En particulier :

$$\boxed{(1,0,0,-1)_{can} = (-13,\ 10,\ 3,\ 1)_{\mathcal{B}}}$$

Exercice 2

1. $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \forall v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$
$\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=\varphi(\lambda x+\mu a,\ \lambda y+\mu b,\ \lambda z+\mu c)$$
$$=\Big((\lambda x+\mu a)-3(\lambda y+\mu b)+3(\lambda z+\mu c),\ 2(\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c),\ 2(\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c)\Big)$$
$$=\lambda\left(x-3y+3z,\ 2y-z,\ 2y-z\right)+\mu\left(a-3b+3c,\ 2b-c,\ 2b-c\right)$$
$$=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$$

Donc φ linéaire. de plus, $\varphi(\mathbb{R}^3)\subset\mathbb{R}^3$

donc φ est un endo de $\mathbb{R}^3$

2. $u=(x,y,z)\in\ker\varphi \iff \varphi(u)=0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff\begin{cases}x-3y+3z=0\\ 2y-z=0\\ 2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-3y+3z=0\\ 2y-z=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=3y-3z=3y-6y=-3y\\ z=2y\\ y\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

donc $u\in\ker\varphi \iff u=(-3y,\ y,\ 2y)=y(-3,1,2)$

donc $\boxed{\ker\varphi=\mathrm{Vect}(-3,1,2)}$ et $\dim\ker\varphi=1$

φ n'est pas injective

(3.) th du rang : $rg(\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc $\underline{rg(\varphi) = 3-1 = 2}$

$rg(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\underline{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$

(4.) $A = \underset{\mathcal{B}_{can}}{\operatorname{mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\big((1,0,0), (-3,2,2), (3,-1,-1)\big)$

or $(-3,2,2) + 2(3,-1,-1) = (3,0,0) = 3(1,0,0)$

donc $(-3,2,2) = 3(1,0,0) - 2(3,-1,-1)$

donc $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(3,-1,-1)}_{v_2}\big)}$

(v_1, v_2) libre donc est une base de $\operatorname{Im}\varphi$

(5.) (a) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A$

donc $\boxed{\varphi \circ \varphi = \varphi}$

(b) soit on passe par le produit matriciel $A(A-I)$ et $(A-I)A$

soit : $\varphi \circ (\varphi - id) = \varphi \circ \varphi - \varphi \circ id = \varphi - \varphi = 0$

$(\varphi - id) \circ \varphi = \varphi \circ \varphi - id \circ \varphi = \varphi - \varphi = 0$

(c) . Soit $v \in \mathrm{Im}(\varphi - id)$: $\exists u \in \mathbb{R}^3$, $v = (\varphi - id)(u)$
$= \varphi(u) - u$.

donc $\varphi(v) = \varphi \circ (\varphi - id)(u) = 0$

donc $v \in \ker \varphi$.

cl : $\underline{\mathrm{Im}(\varphi - id) \subset \ker \varphi}$

. Soit $v \in \mathrm{Im}\varphi$, $\exists u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(u) = v$

donc $(\varphi - id)(v) = (\varphi - id) \circ \varphi(u) = 0$

donc $v \in \ker(\varphi - id)$

cl : $\underline{\mathrm{Im}\varphi \subset \ker(\varphi - id)}$

(6.) . On a déjà $\underline{\mathrm{Im}\varphi \subset \ker(\varphi - id)}$

. $A - I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ donc $(\varphi - id)(x,y,z)$
$= (-3y + 3z, y - z, 2y - 2z)$

$u = (x,y,z) \in \ker(\varphi - id) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x, z \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $u \in \ker(\varphi - id) \Leftrightarrow u = (x, z, z) = x(1,0,0) + z(0,1,1)$

donc $\ker(\varphi - id) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0), (0,1,1)\big)$

or $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\big((1,0,0), (3,-1,-1)\big)$

$\left.\begin{array}{l} \text{et } (1,0,0) \in \mathrm{Im}\varphi \\ (0,1,1) = 3(1,0,0) - (3,-1,-1) \in \mathrm{Im}\varphi \end{array}\right\}$ $\mathrm{Im}\varphi$ est un $\underline{\underline{ev}}$ donc $\underline{\ker(\varphi - id) \subset \mathrm{Im}\varphi}$

Conclusion : $\underline{\mathrm{Im}\varphi = \ker(\varphi - id)}$

(7.) $\mathcal{B} = \big((-3,1,2), (1,0,0), (3,-1,-1) \big)$

compte 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ quelconques tq $\lambda_1(-3,1,2) + \lambda_2(1,0,0) + \lambda_3(3,-1,-1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}$ est donc libre donc <u>$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.</u>

(8.) $\varphi(-3,1,2) = 0$ puisque $(-3,1,2) \in \ker \varphi$.

$\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$ puisque $(1,0,0) \in \ker(\varphi - id)$

$\varphi(3,-1,-1) = (3,-1,-1)$ puisque $(3,-1,-1) \in \ker(\varphi - id)$

donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$