

Exercice 1

- (1) f continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et quotient de fonctions continues.

en 0: $f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f continue en 0.

Conclusion: f continue sur $\mathbb{R}_+$

- (2) f dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables.

en 0, $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x}}{x(e^x - 1)} = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

or $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion: f dérivable sur $]0, +\infty[$

Exercice 2.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$		$-$	$+$	$-$

Donc $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$

- f continue sur $[-1, 1]$
- f dérivable sur $] -1, 1[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

en -1 :
$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x+1}$$

or $x \rightarrow -1$
 $x > -1$ donc $x+1 > 0$

et $x < 1$ donc $1-x > 0$.

donc:
$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{x+1} = \frac{(1-x)^{3/2}}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty$$

donc f non dérivable en -1 (tgt verticale)

en 1 :
$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \in \mathbb{R}$$

donc f dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

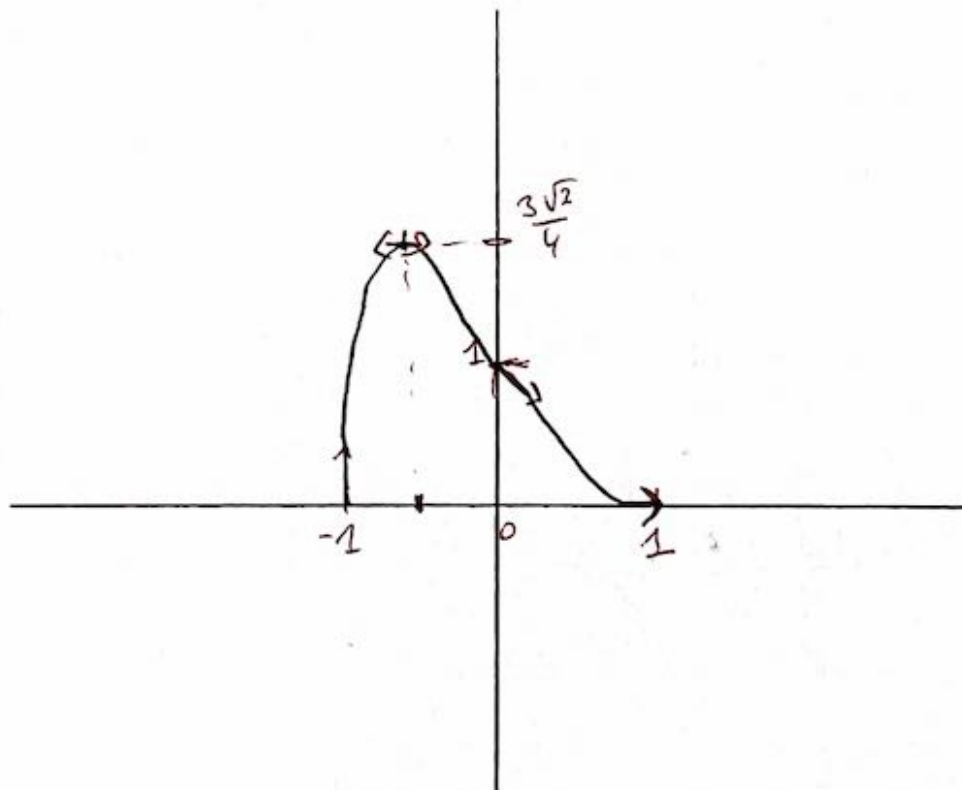
$\forall x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x+x^3 + x(1-x))$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x^2 + x + 2)$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$-2x^2 + x + 2$		$-$	$+$
$f'(x)$	$ $	$+$	$-$
f	$\circ$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\circ$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$