

Exercice 1

①. $\forall Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère le système $PX = Y$
d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -2x + y - z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} x + y = a \\ \textcircled{2} y - z = 2a + b \\ \textcircled{3} z = -a + c \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$|_R(P)| = 3$ donc P est inversible.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y = \left(1 - \frac{1}{3}\right)a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c \\ y = \frac{1}{3}(2a + b + z) = \frac{1}{3}((2-1)a + b + c) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ z = -a + c \end{cases}$$

Conclusion:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.)

$$D = P^{-1}NP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D ist diagonale donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

3.)

$$D = P^{-1}NP$$

$$\text{donc } PD = P(P^{-1}NP) = (PP^{-1})NP = INP = NP$$

$$PD P^{-1} = (NP)P^{-1} = N(PP^{-1}) = NI = N$$

$$\text{Donc } \underline{N = P D P^{-1}} \quad \forall$$

4.)

$$\text{Par récurrence sur } n \in \mathbb{N}; N^n = P D^n P^{-1}$$

$$\text{si } \underline{n=0}, N^0 = I \text{ et } P D^0 P^{-1} = P P^{-1} = I \quad \forall$$

$$\text{si } \underline{n \geq 1} \quad \text{Sq } N^n = P D^n P^{-1} \text{ a un certain rang } n$$

$$\text{Nq } N^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$$

$$\Pi^{n+1} = \Pi^n \times \Pi$$

$$\stackrel{(HR)}{=} (\Gamma D^n P^{-1}) \Pi = (\Gamma D^n P^{-1}) (\Gamma D P^{-1})$$

$$= P D^n (\Gamma^{-1} \Gamma) D P^{-1}$$

$$= P (D^n D) P^{-1}$$

$$= \Gamma D^{n+1} P^{-1} \quad : \text{récurrence achevée}$$

Exercice 2.

f est bien définie sur $x > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-2} + (x + \ln x) e^{x-2} \\ &= e^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \text{ on pose } g(x) = 1 + x + \frac{1}{x} + \ln(x)$$

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1 + x}{x^2} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{ou } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \quad (\text{car } \sqrt{5} > \sqrt{1})$$

x	0	$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g		$g\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	
$g(x)$		+	
$f''(x)$		+	
f			$+\infty$

$$g\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \frac{2}{(-1+\sqrt{5})} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ln\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

> 0

$$1 + \ln\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \ln(e) + \ln\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\ln \frac{e}{2} > 1$ at $\sqrt{5}-1 > 1$ (ca $\sqrt{5} > 2$)

done $\frac{e}{2}(\sqrt{5}-1) > 1$

done $\ln\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 > 0$ Conclusion: $g\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$.

En 0: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$: Γ admet une asymptote verticale $x=0$.

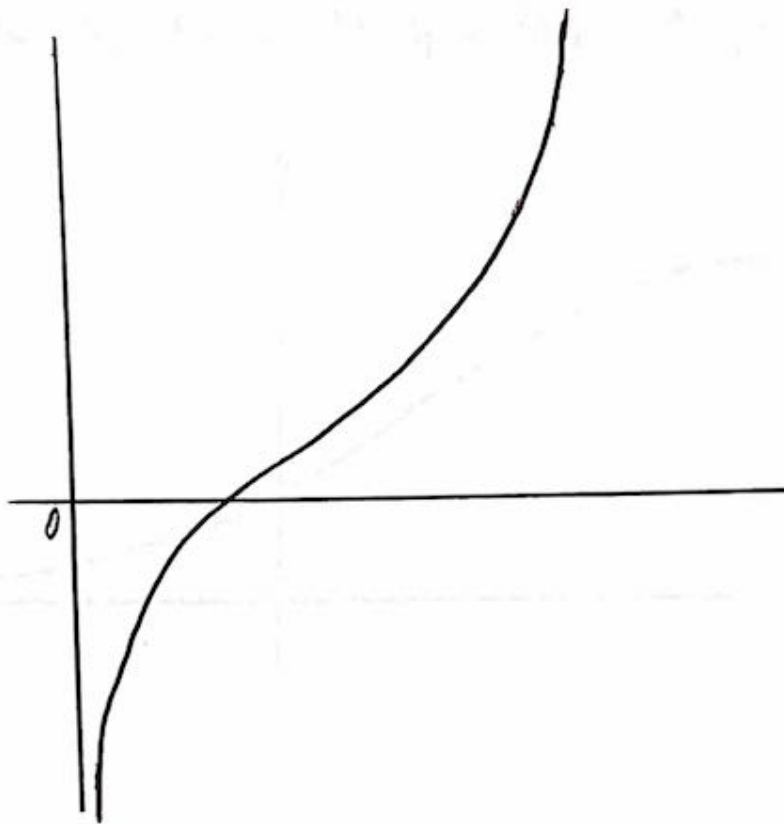
En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right) e^{x-1}$$

par C.C, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

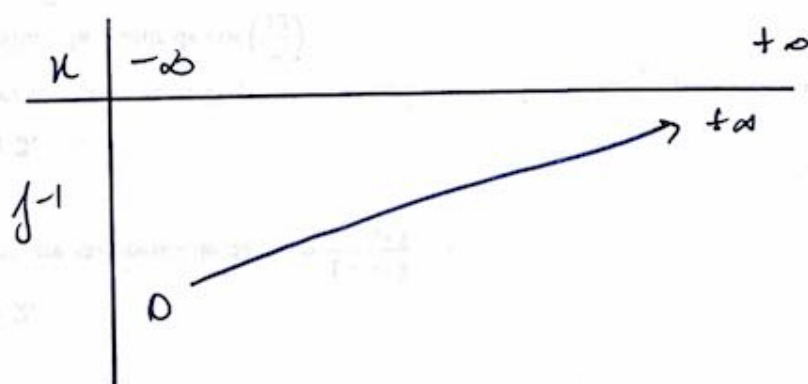
done $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc Γ admet une b.p verticale.



- f $\uparrow$ sur $]0, +\infty[$ donc f est injective sur $]0, +\infty[$.
- $f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ donc f est surjective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion: f est bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.



symétrie par rapport à la 1^{re} bissectrice: $\Delta: y=x$

