DM 10 _ Corrigé
28/03/2025

Exercice 1

(1.) $A_1, \bar{A}_1$ forment un sce

FPT : $P(G_1) = P_{A_1}(G_1) \times P(A_1) + P_{\bar{A}_1}(G_1) \times P(\bar{A}_1)$

$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10}$, donc $\boxed{P(G_1) = \frac{3}{20}.}$

(2.) . $G_1, \bar{G}_1$ forment un sce

FPT. $P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \bar{G}_1)$

. $\left(P_{G_1}(G_2) = \frac{P(G_2 \cap G_1)}{P(G_1)} \quad \text{et} \quad P_{\bar{G}_1}(G_2) = \frac{P(G_2 \cap \bar{G}_1)}{P(\bar{G}_1)}\right)$ donc inutile _

$A_1, \bar{A}_1$ forment un sce donc FPT ;

$P(G_2 \cap G_1) = P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) + P(\bar{A}_1 \cap G_1 \cap G_2)$

avec (FPC) : . $P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(G_1) \times P_{A_1 \cap G_1}(G_2)$ il reste sur la machine A

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{50}$

. $P(\bar{A}_1 \cap G_1 \cap G_2) = P(\bar{A}_1) \times P_{\bar{A}_1}(G_1) \times P_{\bar{A}_1 \cap G_1}(G_2)$ il reste sur la machine B

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{1}{200}$

Donc $P(G_2 \cap G_1) = \frac{1}{50} + \frac{1}{200} = \frac{4+1}{200} = \frac{5}{200} = \boxed{\frac{1}{40}}$

De même : $P(G_2 \cap \bar{G}_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(\bar{G}_1) \times P_{A_1 \cap \bar{G}_1}(G_2)$ il passe sur B.

$+ P(\bar{A}_1) P_{\bar{A}_1}(\bar{G}_1) \times P_{\bar{A}_1 \cap \bar{G}_1}(G_2)$

il passe sur A

$$P(G_2 \cap \bar{G}_1) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{5} \times \frac{1}{\cancel{10}\,5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{9}{100} = \frac{4+9}{100} = \frac{13}{100}.$$

Conclusion : $\boxed{P(G_2) = \frac{1}{40} + \frac{13}{100} = \frac{5+26}{200} = \frac{31}{200}.}$

(3.) Formule de Bayes,

$$P_{G_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G_2)}{P(G_2)}$$

$G_1, \bar{G}_1$ forment un sce donc FPT :

$$P(A_1 \cap G_2) = P(A_1 \cap G_2 \cap G_1) + P(A_1 \cap G_2 \cap \bar{G}_1)$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{25} = \frac{3}{50}.$$ (question précédente)

donc $\boxed{P_{G_2}(A_1) = \frac{3}{\cancel{50}} \times \frac{\cancel{200}\,4}{31} = \frac{12}{31}}$

(4.) (a) $A_k, \bar{A}_k$ forment un sce donc FPT :

$$P(G_k) = P_{A_k}(G_k) \times P(A_k) + P_{\bar{A}_k}(G_k) \times P(\bar{A}_k)$$

$$= \frac{1}{5} P(A_k) + \frac{1}{10}(1 - P(A_k))$$

donc $\boxed{P(G_k) = \frac{1}{10} P(A_k) + \frac{1}{10}}$

(b) $A_k, \bar{A}_k$ forment un sce donc FPT :

$$P(A_{k+1}) = P_{A_k}(A_{k+1}) \times P(A_k) + P_{\bar{A}_k}(A_{k+1}) \times P(\bar{A}_k)$$

• $P_{A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{5}$

A_k : il est sur la machine A à la k^{e} partie

A_{k+1} : il est encore sur la machine A à la $(k+1)^{e}$ partie

⟺ il a gagné la partie k.

• $P_{\bar{A}_k}(A_{k+1}) = \frac{9}{10}$

$\bar{A}_k$: il est sur B à la k^{e} partie

A_{k+1} : il change : il va sur A à la $(k+1)^{e}$ partie

⟺ il perd la partie k

donc $P(A_{k+1}) = \frac{1}{5} P(A_k) + \frac{9}{10}(1 - P(A_k))$

donc $\boxed{P(A_{k+1}) = \frac{-7}{10} P(A_k) + \frac{9}{10}}$

(c) On résout $x = -\frac{7}{10}x + \frac{9}{10} \iff \frac{17}{10}x = \frac{9}{10} \iff x = \frac{9}{17}$

donc $\left(P(A_k) - \frac{9}{17}\right)_k$ est géo de raison $\frac{-7}{10}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = \left(\frac{-7}{10}\right)^{k-1}\left(P(A_1) - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17}$ avec $P(A_1) = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{P(A_k) = \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{34}\right) + \frac{9}{17}}$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(G_k)=\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{34}\right)+\frac{9}{17}\right)+\frac{1}{10}.}$$

(d) $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{9}{17}\right)-\frac{1}{340}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{n}{10}\left(1+\frac{9}{17}\right)-\frac{1}{34\times10}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-7}{10}\right)^{k}\qquad(k'=k-1)$$

$$=\frac{n}{10}\times\frac{26}{17}-\frac{1}{34\times10}\times\frac{1-\left(-\frac{7}{10}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{7}{10}\right)}\qquad\left(-\frac{7}{10}\neq1\right)$$

$$=\frac{13n}{5\times17}-\frac{1}{34\cancel{\times10}}\times\frac{\cancel{10}}{17\cancel{\times10}}\left(1-\left(-\frac{7}{10}\right)^{n}\right)$$

$$\boxed{S_n=\frac{13n}{5\times17}-\frac{1}{34\times17}\left(1-\left(-\frac{7}{10}\right)^{n}\right)}$$

Exercice 2

Soit les événements : $S=$ "le système tombe en panne"

$\Pi_k=$ " la machine k tombe en panne

$$S=\Pi_1\cup\Pi_2\cup\Pi_3.$$

$$P(S)=1-P(\bar S)=1-P(\bar\Pi_1\cap\bar\Pi_2\cap\bar\Pi_3)$$

par indépendance, $P(\bar\Pi_1\cap\bar\Pi_2\cap\bar\Pi_3)=P(\bar\Pi_1)\times P(\bar\Pi_2)\times P(\bar\Pi_3)$
$=p_1p_2p_3.$

donc $\boxed{p(S)=1-p_1p_2p_3.}$