DM1 . Corrigé .
Vendredi 13 Septembre

Exercice 1

On résout dans $\mathbb{R}$.

1 est racine évidente de x^2+x-2, l'autre est -2

donc $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$$\begin{aligned} x^2+x-2 = x(x+2)^2 &\iff (x-1)(x+2) = x(x+2)^2 \\ &\iff (x-1)(x+2) - x(x+2)^2 = 0 \\ &\iff (x+2)\left[(x-1) - x(x+2)\right] = 0 \\ &\iff (x+2)\left[-x^2-x-1\right] = 0 \\ &\iff (x+2)(x^2+x+1) = 0. \end{aligned}$$

x^2+x+1 n'a aucune racine réelle car $\Delta = -3 < 0$

donc $\boxed{S = \{-2\}.}$

Exercice 2

x^2-6x+7 : $\Delta = 36-28 = 8 > 0$

donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3-\sqrt{2}$

et $x_2 = 3+\sqrt{2}$

- $3+\sqrt{2} > 2$
- $3-\sqrt{2} > -1 \iff 4 > \sqrt{2} \iff \sqrt{16} > \sqrt{2}$ VRAI

donc $3-\sqrt{2} > -1$

- $3-\sqrt{2} < 2 \iff 1 < \sqrt{2} \iff \sqrt{1} < \sqrt{2}$ VRAI donc $3-\sqrt{2} < 2$

x	$-\infty$		-1		$3-\sqrt{2}$		2		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$(2-x)^3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-6x+7		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]3-\sqrt{2}, 2\right[\cup \left]3+\sqrt{2}, +\infty\right[}$$

Exercice 3

Ensemble de résolution : $x-1 \neq 0$ et $1 - \frac{1}{x-1} \neq 0$.

. $1 - \frac{1}{x-1} = 0 \iff \frac{1}{x-1} = 1 \iff x-1 = 1 \iff x = 2.$

donc on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}} \geq 5 \iff \frac{1}{\frac{x-1-1}{x-1}} \geq 5 \iff \frac{x-1}{x-2} \geq 5$$

$$\iff \frac{x-1}{x-2} - 5 \geq 0 \iff \frac{x-1-5(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\iff \frac{-4x+9}{x-2} \geq 0.$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{4}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$x-\frac{2}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+9$		$+$		$+$	0	$-$	
quotient		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]\frac{2}{4}, \frac{9}{4}\right] \text{ car } 1 \notin \left]2, \frac{9}{4}\right]}$$

Exercice 4

1. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} < a < \frac{3}{5} \\ -3 < b < -1 \end{array}\right\}$ donc $\frac{1}{2} - 3 < a+b < \frac{3}{5} - 1$

$$\boxed{-\frac{5}{2} < a+b < -\frac{2}{5}}$$

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} < a < \frac{3}{5} \\ 1 < -b < 3 \end{array}\right\}$ donc $\frac{1}{2}+1 < a-b < \frac{3}{5}+3$

$$\boxed{\frac{3}{2} < a-b < \frac{18}{5}}$$

3. $\frac{5}{2} < 5a < 3$

$-6 < 2b < -2$ donc $2 < -2b < 6$

donc $\frac{5}{2} + 2 < 5a - 2b < 3 + 6$

$$\boxed{\frac{9}{2} < 5a - 2b < 9}$$

$-3 < b < -1$ donc $1 < 4+b < 3$

$a > 0$ donc $\frac{1}{2} < a < a(4+b) < 3a < \frac{9}{5}$

donc $\boxed{\frac{1}{2} < a(4+b) < \frac{9}{5}}$

5. $-3 < b < -1$

$a > 0$ donc $-3a < ab < -a$

$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{5}$ donc $\begin{cases} -a < -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{5} < -3a \end{cases}$

donc $\boxed{-\frac{9}{5} < ab < -\frac{1}{2}}$

6. $-3 < b < -1$ donc $-1 < \frac{1}{b} < -\frac{1}{3}$.

$a > 0$ donc $-a < \frac{a}{b} < -\frac{a}{3}$

$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{5}$ donc $\begin{cases} -\frac{3}{5} < -a \\ -\frac{a}{3} < -\frac{1}{6}. \end{cases}$

donc $\boxed{-\frac{3}{5} < \frac{a}{b} < -\frac{1}{6}}$

7. $-3 < b < -1$

$(x \mapsto x^2) \Downarrow$ sur $\mathbb{R}_-$ et $-3, b, -1 \in \mathbb{R}_-$

donc $\boxed{1 < b^2 < 9}$