

- *Unité, Dimension et Expression d'un résultat* -

Notions et contenus	Capacités exigibles
Analyse dimensionnelle	- Vérifier l'homogénéité d'une expression littérale à partir d'une analyse dimensionnelle des termes présents. - Définir un ordre de grandeur (durée, longueur) par analyse dimensionnelle d'une équation modélisant un phénomène.

**I- UNITE d'une grandeur****1) Les 7 unités de base du Système International**

Dans notre discipline, on réalise souvent des mesures ou des calculs pour déterminer la valeur d'une grandeur ; pour que cette valeur ait un sens physique, elle est toujours suivie d'une unité en accord avec la propriété qui a été quantifiée : la vitesse d'une automobile peut s'exprimer en mètre par seconde ou en kilomètre par heure, la masse volumique d'une espèce chimique peut s'exprimer en gramme par litre ou en kilogramme par mètre cube ...

On rencontre ainsi une très grande variété d'unités, mais 7 d'entre elles se distinguent des autres : il s'agit des 7 « unités de bases », qui constituent le système d'unités du **Système International (S.I.)** :

- Ces 7 unités de base sont **indépendantes les unes des autres**.
- **N'importe quelle autre unité rencontrée en physique-chimie peut s'exprimer en fonction de ces 7 unités !**

En 2018, lors de la 26<sup>ème</sup> conférence générale des Poids et Mesures, ces 7 unités de base du Système International ont toutes été redéfinies à partir de constantes physiques dont la valeur exacte a été fixée définitivement.

Nom des 7 unités de base et symbole	Nature de la grandeur physique associée (= dimension)	Constante physique servant à la définition
<b>Le mètre</b> : m		Unité définie à partir de la valeur numérique de la <u>célérité de la lumière dans le vide</u> : $c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
<b>Le kilogramme</b> : kg		Unité définie à partir de la valeur numérique de la <u>constante de Planck</u> : $h = 6,62607015\cdot 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ (ou $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ )
<b>La seconde</b> : s		Unité définie à partir de la valeur numérique de la <u>fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé</u> , fixée à <b>9 192 631 770 Hz</b> (ou $\text{s}^{-1}$ )
<b>L'ampère</b> : A		Unité définie à partir de la valeur numérique de la <u>charge électrique élémentaire</u> : $e = 1,602176634\cdot 10^{-19}\text{ C}$ (ou A.s)
<b>Le kelvin</b> : K		Unité définie à partir de la valeur numérique de la <u>constante de Boltzmann</u> : $k = 1,380649\cdot 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ (ou $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ )
<b>La mole</b> : mol		Une mole d'entités contient exactement $N_A = 6,02214076\cdot 10^{23}$ entités. Ce nombre est appelé <u>nombre d'Avogadro</u> .
<b>La candela</b> : Cd		Unité définie à partir de la valeur numérique de l' <u>efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10<sup>12</sup> Hz</u> : $K_{cd} = 683\text{ lm}\cdot\text{W}^{-1}$ (ou $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^3$ ) (Remarque : sr = stéradian = unité d'angle solide)

**2) Les autres unités**

Toutes les autres grandeurs qui ne sont pas purement une longueur, une masse, un temps, une intensité de courant électrique, une température, une quantité de matière ou une intensité lumineuse sont exprimées au moyen d'unités faisant intervenir directement ou indirectement les 7 unités de bases sous forme d'un produit de puissances.

**a/ Unités exprimées DIRECTEMENT à partir des 7 unités de base**

Voici une liste non exhaustive de quelques exemples :

Nature de la grandeur (= dimension)	Superficie	Volume	Vitesse	Accélération	Masse volumique	Concentration molaire
Unité exprimée en fonction des 7 unités SI						

**b/ Unités exprimées INDIRECTEMENT à partir des 7 unités de base**

Par souci de commodité, certaines grandeurs ont une unité ayant un **nom spécial** et un **symbole particulier** et qui semble ne faire aucune référence aux 7 unités de base du Système International. Mais à l'aide de formules convenablement choisies, on peut montrer que ces unités s'expriment bel et bien en fonction des 7 unités SI : voir paragraphe II-2).

☞ - Exemples :

### 3) Multiples et sous-multiples

Toutes les unités ne sont pas adaptées aux échelles de travail ; par exemple, les chimistes de laboratoire utilisent plus souvent le gramme que le kilogramme, car cela correspond plus aux quantités qu'ils utilisent chaque jour. On est donc amené à utiliser aussi des multiples ou des sous-multiples d'unités, avec les conventions usuelles suivantes :

Multiple de U	$10^{-15}$ U	$10^{-12}$ U	$10^{-9}$ U	$10^{-6}$ U	$10^{-3}$ U	$10^3$ U	$10^6$ U	$10^9$ U	$10^{12}$ U
Préfixe									
Symbole									

Selon les grandeurs concernées par ces multiples ou ces sous-multiples, on donne des noms particuliers à ces unités ; par exemple : la minute (1 min = 60 s), l'heure (1 h = 3600 s), le bar (1 bar =  $10^5$  Pa), le litre (1 L =  $10^{-3}$  m<sup>3</sup>), la tonne (1 t =  $10^3$  kg) ...

## II- DIMENSION d'une grandeur

### 1) Définition

La dimension d'une grandeur physique correspond à sa nature intrinsèque : un temps, une vitesse, une concentration molaire ... On peut ainsi associer plusieurs unités à une même dimension, mais pas l'inverse ! Par exemple, la célérité de la lumière a la dimension d'une vitesse mais son unité peut être le m.s<sup>-1</sup>, le km.h<sup>-1</sup> ...

Comme les 7 unités de base SI sont indépendantes les unes des autres, les dimensions de chacune le sont également. Les 7 dimensions associées aux 7 unités de base SI sont regroupées dans le tableau ci-dessous, avec leur symbole en lettre majuscule.

La longueur	La masse	Le temps	L'intensité électrique	La température	La quantité de matière	L'intensité lumineuse

• **Notation** : pour désigner la dimension d'une grandeur X, on la note entre crochets : [X].

### 2) Equation aux dimensions

#### a/ Cas général

N'importe quelle grandeur physique a une unité qui peut s'exprimer en fonction des 7 unités de base du Système International. Il en est donc de même pour la dimension de cette grandeur physique qui pourra s'exprimer en fonction des 7 dimensions de base du Système International : c'est ce qu'on appelle « écrire l'EQUATION AUX DIMENSIONS d'une grandeur physique ».

• L'EQUATION AUX DIMENSIONS de toute grandeur physique G se met sous la forme :

☞ - **Application 1** : Etablir l'équation aux dimensions des grandeurs ci-dessous.

	Superficie	Volume	Vitesse	Accélération	Masse volumique	Concentration molaire
<b>Dimension exprimée en fonction des 7 dimensions SI</b>						

#### b/ Cas des grandeurs sans dimension

Certaines grandeurs n'ont pas de dimension : on dit qu'elles sont sans dimension ou adimensionnées. Dans une équation aux dimensions faisant intervenir de telles grandeurs, leur dimension est remplacée par le chiffre 1 (elle est souvent omise).

☞ - **Exemples de grandeurs sans dimension** :

- 
- 
- 

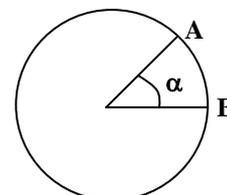


Bien que l'unité de la mesure d'un angle soit le radian, un angle est SANS DIMENSION : en effet, c'est un autre exemple de grandeur qui est le rapport de deux grandeurs sans dimension (rapport de deux longueurs) ...

	Portion de cercle	Cercle entier
Longueur de l'arc (en m)	AB	$2\pi R$
Valeur de l'angle (en rad)	$\alpha$	$2\pi$

Par proportionnalité :

$$\alpha = \frac{AB \times 2\pi}{2\pi R} = \frac{AB}{R}$$



### 3) Analyse dimensionnelle

#### a/ Principe de la méthode

Réaliser une analyse dimensionnelle consiste à **analyser les dimensions de chaque grandeur dans une formule.**

☛ L'expression  $A = B + C$  est **HOMOGENE** si \_\_\_\_\_

**Une formule non homogène est nécessairement fautive.**



La dimension des dérivées et intégrales est telle que :  $\left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{[x]}{[t]}$  et  $\left[ \int v dt \right] = [v] \times [t]$

#### b/ Application à la détection d'erreur dans une formule

Afin de détecter une potentielle erreur dans l'expression littérale d'une formule qu'on vient d'établir, il est conseillé de procéder à son analyse dimensionnelle.

☞ - **Application 2** : Un élève propose  $V = 4\pi R^2$  pour le volume d'une sphère de rayon  $R$ . Cette formule peut-elle être juste ?

#### c/ Application à la détermination de l'unité SI d'une grandeur

Pour établir l'unité SI d'une grandeur, on réalise généralement l'analyse dimensionnelle d'une formule la concernant.

☞ - **Application 3** : A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI de chaque grandeur ci-dessous.

Grandeur physique	Unité spéciale	Formule simple	Analyse dimensionnelle	Unité dans le système SI
Fréquence	Hertz (Hz)			
Force	Newton (N)			
Pression	Pascal (Pa)			
Energie	Joule (J)			
Puissance	Watt (W)			

#### d/ Application à la détermination d'une formule par analyse dimensionnelle

☛ Si une grandeur  $X$  est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs  $A, B, C$  caractéristiques du problème et dimensionnellement indépendantes, cette grandeur  $X$  peut très souvent se mettre sous la forme :

$$X = k A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

où  $k$  est une constante numérique et où les exposants  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle.

☞ - **Application 4** : La vitesse  $v$  d'un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre est susceptible de dépendre de la masse  $M_T$  de la Terre, du rayon  $R$  de l'orbite, et de la constante de gravitation universelle  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ . En donner une expression plausible.

- D'après l'énoncé, on propose :

- L'équation aux dimensions de cette formule s'écrit :

Soit :

Donc :

- Par identification des exposants associés à chaque dimension, on obtient un système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L) \rightarrow \\ (T) \rightarrow \\ (M) \rightarrow \end{array} \right. \left\{ \right. \left. \left\{ \right.$$

- Conclusion :

Et finalement,

### **III- Expression d'un résultat**

#### **1) Règles de base**

A toute question nécessitant un calcul, vous devez :

- Si possible **introduire les lois ou formules utilisées par une phrase** ;
- Donner une **expression littérale** (c'est-à-dire avec des lettres uniquement) de la grandeur recherchée ;
- **Encadrer l'expression littérale finale** après avoir **vérifié son homogénéité** ;
- Procéder à l'**application numérique** (AN) en veillant bien au **choix des unités** des grandeurs utilisées dans les calculs (en se plaçant systématiquement dans le système d'unités international, on évite bien des erreurs...)
- Donner le **résultat numérique** avec un **nombre de chiffres significatifs** (CS) adapté, et sans omettre l'unité : **souligner ce résultat**.

#### **2) Chiffres significatifs (CS)**

☛ **Définition** :

☞ - **Application 5** : Donner le nombre de CS dans les cas suivants :

	1,704	17,04	0174	174,0	07,14	0,000714	0,0071400	$7,140 \cdot 10^{-5}$
Nombre de CS								

☛ **Propriété** : Le résultat d'un calcul ne peut pas être plus précis que la donnée la moins précise, c'est-à-dire celle qui comporte le plus petit nombre de chiffres significatifs.

- Pour une **multiplication ou une division**, le résultat ne doit pas avoir plus de **CS** que la donnée qui en a le moins.
- Pour une **addition ou une soustraction**, le résultat ne doit pas avoir plus de **décimales** que la donnée qui en a le moins : dans ce cas, raisonner sur l'écriture décimale du nombre et non sur l'écriture scientifique !

On sera donc amené à **arrondir le résultat affiché sur la calculatrice** : pour cela, choisir le dernier chiffre (à droite) à conserver, augmenter ce chiffre d'une unité si le chiffre suivant est supérieur ou égal à 5 ou conserver ce chiffre si le chiffre suivant est strictement inférieur à 5.

☞ - **Application 6** : Donner les résultats des calculs ci-dessous avec un nombre de chiffres significatifs adapté.

a)  $1 / 340$  ; b)  $8,00 / 1500$  ; c)  $4,50 \cdot 10^{-3} \times 299792458$  ; d)  $45,6 - 23$  ; e)  $45,678 + 24,5$



Dans la pratique, on attend que vous annonciez vos résultats avec un **nombre de CS raisonnable** (2 ou 3).

#### **3) Ordre de grandeur d'un nombre**

☛ **Définition** :

Dans la pratique, on écrit le nombre dont on doit donner l'ordre de grandeur en écriture scientifique  **$a \cdot 10^n$**  avec  **$1 \leq a < 10$** .  
**Si  $a < 5$** , l'ordre de grandeur est  **$10^n$**  ; **si  $a \geq 5$** , l'ordre de grandeur est  **$10^{n+1}$** .

☞ - **Application 7** : Donner l'ordre de grandeur des résultats obtenus à l'Application 6.