

- Mesures et Incertitudes -

Notions et contenus	Capacités exigibles
- Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. - Incertitude. - Incertitude-type.	- Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. - Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). - Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). - Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
- Incertitudes-types composées.	- Évaluer à l'aide d'une relation fournie, l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. - Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. (Capacité numérique) : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire – simulation de Monte-Carlo – permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
- Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	- Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. - Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

I- Variabilité et Incertitude-type**1) La variabilité en science expérimentale**

Il ne vous a probablement pas échappé que lors des séances de travaux pratiques, il est très courant, voire systématique, que les résultats obtenus pour une même mesure faite par différents groupes de TP sont sensiblement différents : on parle de **variabilité de la mesure**. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique ! Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure : par exemple, choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !
- les variations de l'environnement : par exemple, si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.
- les instruments de mesure : par exemple, mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente ...
- et surtout, la personne réalisant l'expérience.

2) L'incertitude-type

Il existe donc un doute sur la validité du résultat obtenu expérimentalement : ce doute est appelé **incertitude-type**. Pour une grandeur **X** dont la valeur mesurée vaut **x**, **l'incertitude-type est notée u(X)** (cela vient de l'anglais « uncertainty » signifiant « incertitude ») et le résultat de la mesure se note sous la forme :

$$X = x \pm u(X) \text{ suivi de son unité}$$

- Dans cette écriture :
- **x** et **u(X)** doivent être exprimées avec la même puissance de 10 ;
 - **u(X)** doit avoir 1 ou 2 chiffre(s) significatif(s) et est majoré ;
 - le dernier chiffre significatif de **x** doit avoir la même position que le dernier chiffre significatif de **u(X)**.

☞ - **Exemples 1** : Compléter le tableau suivant en écrivant les résultats des mesures sous la forme $X = x \pm u(X)$ en respectant les règles d'écriture. Tant que cela reste raisonnable, utiliser l'écriture scientifique.

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude-type	Écriture standardisée du résultat avec 2 chiffres significatifs pour l'incertitude type
Distance	8231,345 m	3,449 m	
Distance	742310,12 m	777,32 m	
Temps	0,014286 s	0,000312 s	
Temps	9,42136 ms	3,99 μ s	
Résistance	1,10876 m Ω	0,3317 m Ω	
Résistance	4,2032 M Ω	5,372 k Ω	

II- Comment évaluer la valeur d'une incertitude-type ?

1) Evaluation de type A

Cette méthode de calcul est celle qu'il faut utiliser si on dispose de n mesures différentes d'une même grandeur réalisées dans les mêmes conditions (même opérateur, même matériel ...). Par exemple, lorsqu'on mesure la durée de l'oscillation d'un pendule simple à l'aide d'un chronomètre, le chronomètre affiche une valeur différente à chaque tentative, même si ces valeurs sont proches les unes des autres.



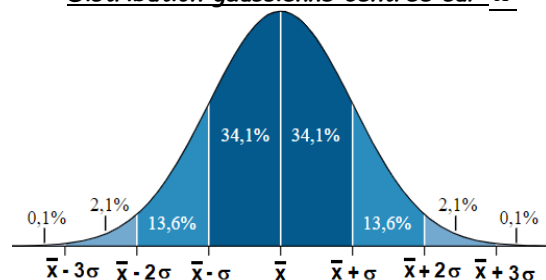
- C'est la méthode à utiliser en TIPE quand on répète plusieurs fois la même expérience ;
- Cette méthode sera aussi utilisée en TP quand on regroupera les résultats obtenus par différents binômes de la classe pour une même mesure, même si rigoureusement, les opérateurs ne sont pas les mêmes (on supposera alors que le matériel utilisé et que la dextérité de tous les binômes sont strictement identiques).

Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs des n mesures d'une même grandeur X . Supposons de plus que ces valeurs sont réparties approximativement selon une **distribution gaussienne**, dite « loi normale » (voir ci-contre). Dans ces conditions, l'incertitude-type $u(X)$ est donnée par la formule :

$$u(X) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \text{moyenne des } x_i$$

ECART TYPE

Distribution gaussienne centrée sur $\bar{x}$



Le meilleur estimateur de la valeur vraie est alors la **moyenne** $\bar{x}$, et on notera le résultat de la mesure sous la forme :

$$X = \bar{x} \pm u(X)$$

Cette notation signifie que la majorité des valeurs obtenues pour X sont comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - u(X) ; \bar{x} + u(X)]$. Mais « majorité » ne signifie pas « totalité » : ainsi, si on réalise une nouvelle mesure, il est tout à fait possible qu'elle soit située en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - u(X) ; \bar{x} + u(X)]$.



- On remarque que plus « n » est grand et plus l'incertitude-type est petite. **On a donc intérêt à augmenter le nombre de mesures pour diminuer l'incertitude sur le résultat.** Mais c'est évidemment chronophage !
- La valeur de l'écart-type permet de détecter les mesures aberrantes, c'est-à-dire fortement éloignées de la valeur moyenne. On considère que les valeurs aberrantes sont toutes celles situées en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma_{n-1} ; \bar{x} + 2\sigma_{n-1}]$. En toute rigueur, il faudrait éliminer ces valeurs et reprendre le calcul de la moyenne et de l'écart-type.

➔ Comment procéder concrètement pour réaliser le calcul de l'incertitude-type par cette méthode ?

Inutile de rentrer la formule de l'écart type dans votre calculatrice. Allez simplement dans le mode STATISTIQUES de celle-ci et rentrer les n mesures à étudier dans une liste. Après quelques manipulations, vous aurez accès à la valeur de la moyenne $\bar{x}$ et à celle de l'écart-type σ_{n-1} ; il suffira alors de diviser cet écart-type par $\sqrt{n}$ pour obtenir l'incertitude recherchée.

🔗 - **Exemple 2 :** Vous disposez d'une pipette jaugée de 2 mL, d'un bécher et d'eau.

a) Réfléchir à un protocole pour déterminer le nombre N_G de gouttes d'eau présentes dans 2 mL d'eau puis le réaliser 5 fois de suite. Noter vos résultats et ceux de vos camarades dans le tableau ci-contre (une ligne par binôme).

b) A l'aide de votre calculatrice, en déduire une valeur de N_G accompagnée de son incertitude de type A.

2) Evaluation de type B

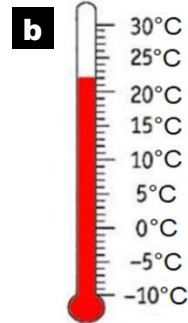
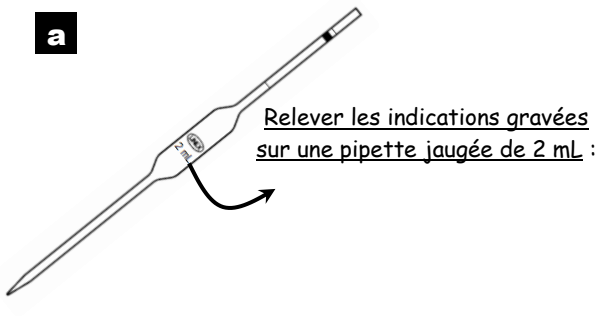
On évalue une incertitude-type avec cette méthode quand on n'a réalisé qu'une mesure unique ou bien dans le cas où la répétition de la mesure conduit exactement à la même valeur. Par exemple, si on se pèse sur un pèse-personne et que l'affichage indique 71,4 kg, l'affichage indiquera toujours 71,4 kg si on y remonte 10 secondes plus tard ! De même, si on mesure la longueur d'une feuille A4 avec une règle graduée au millimètre, on trouvera 297 mm, qu'on la mesure aujourd'hui, demain ou dans 10 jours !

Dans ce cas, l'incertitude-type $u(X)$ dépend d'une grandeur appelée « **demi-étendue** » et notée **a**. Cette grandeur est liée à l'appareil servant à faire la mesure ; le plus souvent, on écrira $u(X) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ avec, selon le cas :

- **a** = « précision » ou « tolérance » indiquée par le constructeur de l'appareil ;
- **a** = moitié de la plus petite graduation d'un appareil gradué ;
- **a** = moitié du plus petit digit* affiché par un appareil à affichage numérique (si on ne dispose pas de la notice de l'appareil indiquant sa « précision ») ...

* le « digit » d'un appareil à affichage numérique est l'unité (et pas la valeur !) du dernier chiffre affiché à droite de l'écran. Par exemple, si un thermomètre indique 28,4 °C, le digit vaut 0,1 °C.

☞ - **Exemples 3** : Exprimer les résultats de mesure ci-dessous en tenant compte des consignes précédentes.



Précision indiquée sur la notice du voltmètre :

0,5 % de la lecture
+ 3 digits

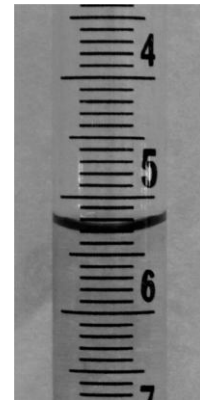
3) Sources d'erreurs multiples

a/ Cas général

Lorsque plusieurs sources d'erreurs indépendantes ϵ_i interviennent dans la mesure de la grandeur **X**, chacune associée à une incertitude-type $u(\epsilon_i)$, l'incertitude-type $u(X)$ sur la mesure résultante est la somme quadratique des différentes incertitudes-types, ce qui se note :

$$u(X) = \sqrt{u^2(\epsilon_1) + u^2(\epsilon_2) + \dots + u^2(\epsilon_i)}$$

☞ - **Exemple 4** : Un opérateur a versé un volume **V** à l'aide de la burette ci-contre. En réfléchissant aux différentes sources d'erreurs mises en jeu, proposer une estimation de l'incertitude sur le volume **V** versé par cette burette.



b/ Cas particulier des appareils à double lecture

Il arrive souvent qu'une mesure nécessite deux lectures ; par exemple lorsqu'on mesure la longueur d'un objet, on le place sur une règle graduée et on repère deux graduations : celle correspondant à une des extrémités de l'objet et celle correspondant à l'autre extrémité. On commet alors une **double erreur de lecture**.

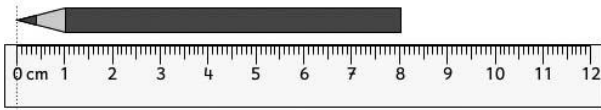
En appliquant la formule générale proposée au II-3.a), on montre que l'incertitude-type $u_{\text{double lecture}}$ liée à une lecture double est reliée à l'incertitude-type $u_{\text{simple lecture}}$ de simple lecture par la relation :

$$u_{\text{double lecture}} = \sqrt{u_{\text{lecture de la 1ère graduation}}^2 + u_{\text{lecture de la 2ème graduation}}^2} = \sqrt{u_{\text{simple lecture}}^2 + u_{\text{simple lecture}}^2} = \sqrt{2 u_{\text{simple lecture}}^2}$$

Finalement : $u_{\text{double lecture}} = \sqrt{2} \times u_{\text{simple lecture}}$

☞ - **Exemples 5** : Exprimer les résultats de mesure ci-dessous.

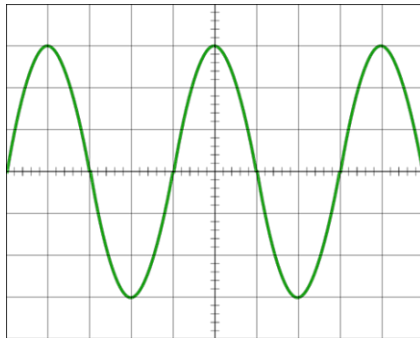
a



b

Mesure de la période :

1 division horizontale = 10,00 ms



4) Incertitude-type d'une grandeur calculée

Lorsqu'une grandeur G est calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées $X, Y, Z \dots$ dont on connaît les incertitudes-types $u(X), u(Y), u(Z) \dots$, l'incertitude-type $u(G)$ s'exprime en fonction des incertitudes-types $u(X), u(Y), u(Z) \dots$: on dit que c'est une **incertitude-composée**.

Dans les cas particuliers les plus fréquents (voir ci-dessous), il existe des formules simples entre ces incertitudes-types ; mais lorsque la fonction liant les différentes grandeurs mesurées est complexe, on aura recours à un outil numérique qui réalisera une simulation à l'aide du logiciel **Python** par exemple ; cette année, nous mettrons en œuvre la méthode dite de Monte-Carlo.

Cas particuliers les plus fréquents : (formules de PROPAGATION DES INCERTITUDES, fournies en BCPST)

Somme	$G = X + Y$	$u(G) = \sqrt{u^2(X) + u^2(Y)}$
Différence	$G = X - Y$	
Produit	$G = X \times Y$	$u(G) = G \times \sqrt{\left(\frac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2}$
Rapport	$G = \frac{X}{Y}$	
Relation affine	$G = a \times X + b$	$u(G) = a \times u(X)$
Relation de puissance	$G = X^n$	$u(G) = n \times G \times \frac{u(X)}{X}$



- Les incertitudes $\frac{u(X)}{X}$ et $\frac{u(Y)}{Y}$ sont appelées **incertitudes relatives** et elles s'expriment en %.

- Il est inutile d'utiliser ces formules sur les incertitudes composées lorsqu'une des incertitudes-types est très grande devant les autres (cas des formules d'addition) ou lorsqu'une incertitude-type relative est très grande devant les autres (cas des formules de produits). Dans ces cas, il suffit de ne considérer que cette contribution.

☞- **Exemple 6** : Dans l'Exemple 2 et dans l'Exemple 3a, on a respectivement déterminé le nombre N_G de gouttes d'eau délivrées par une pipette jaugée de 2 mL et le volume V_p délivré par cette pipette avec leurs incertitudes respectives.

$N_G = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots$ gouttes

$V_p = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots$ mL

➔ En déduire une valeur du volume V_G d'une goutte d'eau avec son incertitude composée.

III- Comment comparer 2 mesures ?

Pour comparer deux mesures entre elles et indiquer si elles sont compatibles ou non, on calcule leur **écart normalisé**. Si on note m_1 et m_2 les deux mesures à comparer et $u(m_1)$ et $u(m_2)$ leur incertitude-type respective, l'écart normalisé entre m_1 et m_2 est noté E_N et vaut :

$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

L'écart normalisé est aussi appelé « **z-score** » et on admettra que **les deux mesures sont compatibles si $E_N < 2$** .

☞- **Exemple 7** : Sur internet, il est indiqué que le volume d'une goutte d'eau vaut $V_G' = 0,045 \pm 0,005$ mL. En déduire si la valeur de V_G obtenue à l'Exemple 6 et cette valeur annoncée sur internet sont compatibles.



On demande parfois de **comparer une mesure expérimentale à une valeur de référence** : cette dernière ayant souvent une incertitude-type $u(m_{REF})$ négligeable devant l'incertitude-type $u(m_{EXP})$ de la mesure expérimentale, cela revient à poser le calcul :

$$E_N = \frac{|m_{EXP} - m_{REF}|}{u(m_{EXP})}$$

ANNEXE : TOLERANCES POUR LA VERRERIE EN CHIMIE

Eprouvettes graduées

Capacité	Division	Tolérance
1000 mL	10 mL	5 ± mL
100 mL	1 mL	0,5 ± mL
10 mL	0,2 mL	0,10 ± mL
2000 mL	20 mL	10 ± mL
250 mL	2 mL	1 ± mL
25 mL	0,5 mL	0,25 ± mL
500 mL	5 mL	2,5 ± mL
50 mL	1 mL	0,5 ± mL

Fioles jaugées de classe A

Capacité mL	Tolérance +/- mL
10	0.04
20	0.04
25	0.04
50	0.06
100	0.10
200	0.15
250	0.15
500	0.25
1000	0.40

Pipettes Jaugées

Capacité nominale / mL	Tolérance	
	Classe A mL	Classe B mL
1	±0,008	±0,015
2	±0,01	±0,02
5	±0,015	±0,03
10	±0,02	±0,04
20	±0,03	±0,06

Burettes graduées

Capacité	Division	Tolérance
10 mL	0,02 mL	0,02 ± mL
25 mL	0,05 mL	0,03 ± mL
50 mL	0,10 mL	0,05 ± mL