

1.

$$\begin{aligned} \alpha > 0, (n \mapsto n^\alpha) \uparrow \uparrow n \in]0, +\infty[\\ \alpha < 0, (n \mapsto n^\alpha) \downarrow \downarrow n \in]0, +\infty[\\ \alpha = 0, (n \mapsto n^\alpha) \text{ constante égale à } 1 \end{aligned}$$

2.

(a) $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} (n \mapsto n^\alpha) \uparrow \uparrow n \in]0, +\infty[\\ \text{et } 1, n, n^2 > 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1 \leq k \leq n \\ 1^\alpha \leq k^\alpha \leq n^\alpha \\ n^\alpha + 1 \leq k^\alpha + n^\alpha \leq n^\alpha + n^\alpha \end{aligned}$$

$$(n \mapsto \frac{1}{n}) \downarrow \downarrow n \in]0, +\infty[\quad \frac{1}{2n^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \leq \frac{1}{1 + n^\alpha}$$

$$\begin{aligned} n^\alpha + 1 > 0 \\ k^\alpha + n^\alpha > 0 \\ 2n^\alpha > 0 \end{aligned}$$

Donc en sommant:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + n^\alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^\alpha} &= \frac{n}{2n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2} \\ \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+n^\alpha} &= \frac{n}{1+n^\alpha} \end{aligned} \right\} \text{Donc } \forall n \geq 1: \quad \frac{n^{1-\alpha}}{2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^\alpha}$$

(b)

si $\alpha > 1$: $n^\alpha = e^{\alpha \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{n}{1+n^\alpha} \sim \frac{n}{n^\alpha}$

avec $\frac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha) \ln(n)}$

Or $1-\alpha < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^\alpha} = 0$

par encadrement: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ($\alpha > 1$)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = 0$

2. si $0 < \alpha < 1$

$\frac{n^{1-\alpha}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ car $1-\alpha > 0$

et $\forall n \geq 1, u_n \geq \frac{n^{1-\alpha}}{2}$

Donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. $\boxed{\alpha = 1}$ $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$

(a) $\forall n \geq 1,$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$$

$$= \frac{1}{n+2+n} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) + 2(n+1)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(2+2-4)n^2 + (3+4-6)n + (1+2-2)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \geq 0$$

Conclusion: (u_n) est croissante

(b) nq (u_n) est majorée :

$\forall n \geq 1: 1 \leq k \leq n$

$1+n \leq k+n \leq 2n$

$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{1+n}$

donc en sommant :

$u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \leq \frac{n}{1+n} = 1$

$\forall n \geq 1: u_n \leq \frac{n}{1+n}$

or $n \leq n+n$ donc $(1+n) > 0$: $\frac{n}{1+n} \leq 1$

Donc: $\forall n \geq 1, u_n \leq 1$

Conclusion: (u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) converge

(c)

On pose $g(x) = \ln(1+x) - x \quad \forall x \in]-1, 1[$.

g est dérivable sur $]-1, 1[$: $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

x	-1	0	1
$-x$		+	-
$1+x$		+	+
$g'(x)$		+	-
g			
$g(x)$		-	-

Conclusion: $\forall x \in]-1, 1[, g(x) \leq 0$ soit $\ln(1+x) \leq x$

• On pose $h(x) = x + \ln(1-x) \quad \forall x \in]-1, 1[$.

h est dérivable sur $]-1, 1[$: $h'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$

x	-1		0		1
$1-x$			+		+
$-x$		+	0	-	
$h'(x)$		+	0	-	
h			0		
$h(x)$		-	0	-	

Conclusion: $\forall x \in]-1, 1[$, $h(x) \leq 0$ mit $x \leq -h(1-x)$

(d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \frac{1}{k+n} < 1$ donc:
 $\forall n \geq 1$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) \leq \frac{1}{k+n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right)$$

donc en sommant:

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) \leq S_n \leq -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+n+1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+n+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k+n) \\ &= \ln(2n+1) - \ln(n+1) \quad (\text{télécopie}) \\ &= \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right) &= -\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+n-1}{k+n}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln(k+n) - \sum_{k=1}^n \ln(k+n-1) \\
 &= \ln(2n) - \ln(n) \quad (\text{téléscopage}) \\
 &= \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln(2)$$

(e) $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \sim \frac{2n}{n}$ avec $\frac{2n}{n} = 2$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$

Conclusion: par encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln(2)$