

Exercice 1

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$(E) \Leftrightarrow 2e^x(e^x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2e^x - 1 = 0$$

$$\text{On pose } X = e^x. \quad X > 0$$

$$(E) \Leftrightarrow 2X^2 + 2X - 1 = 0$$

$$\Delta = 12 > 0$$

$$\text{donc } (E) \Leftrightarrow X = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \in]0, +\infty[\text{ car } \sqrt{3} > 1$$

$$\text{donc } (E) \Leftrightarrow X = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

$$S = \left\{ \ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \right\}$$

Exercice 2

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i+1)j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (i+1)j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (i+1)j$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j (i+1)j &= j \sum_{i=0}^j (i+1) = j \left(\sum_{i=0}^j i + (j+1) \right) = j \left(\frac{j(j+1)}{2} + (j+1) \right) \\ &= \frac{j}{2} (j^2 + 3j + 2) = \frac{1}{2} (j^3 + 3j^2 + 2j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} (j^3 + 3j^2 + 2j) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^n j^3 + 3 \sum_{j=0}^n j^2 + 2 \sum_{j=0}^n j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 4n(n+1) \right) \\
 &= \frac{n(n+1)}{8} \left(n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \right)
 \end{aligned}$$

donc
$$S = \frac{n(n+1)}{8} (n^2 + 5n + 6)$$

Exercice 3

① Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

$\bullet$ $n=0$: $u_0 = 1 > 0$ ✓
 $\bullet$ $n=1$: $u_1 = 1 > 0$ ✓

récurrence initialisée

$\bullet$ Sg: $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ à un certain rang n .

Ny: $u_{n+2} > 0$.

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$$

or par (HR): $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$
 donc $u_n u_{n+1} > 0$
 donc $u_{n+2} > 0$.

récurrence achevée

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on peut poser $\sigma_n = \ln(u_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{n+2} = \frac{1}{2} \ln(u_n u_{n+1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \ln(u_{n+1})$$

$$\sigma_{n+2} = \frac{1}{2} \sigma_n + \frac{1}{2} \sigma_{n+1}$$

Equation caractéristique: $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \lambda 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

avec $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (n=0) \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = \ln(2) & (n=1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\frac{3}{2}\mu = \ln(2) \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu = \frac{2 \ln(2)}{3} \\ \mu = -\frac{2 \ln(2)}{3} \end{cases}$$

donc: $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \frac{\ln(4)}{3} - \frac{\ln(4)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp\left(\frac{\ln(4)}{3} - \frac{\ln(4)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$