DS1 - Mathématiques.
Le 18/09/2024
CORRIGÉ

Exercice 2

(1.) $$8\times(7\times5)^5\times\frac{5^2\times7^3}{7^4\times5^5}\times(7^{-2})^2$$

$$=\frac{8\times7^5\times5^5\times5^2\times7^3\times7^{-4}}{7^4\times5^5}$$

$$=\frac{8\times\cancel{7^4}\times5^7}{\cancel{7^4}\times5^5}$$

$$=8\times5^2$$

$$=\boxed{2^3\times5^2}$$

(2.) $$\frac{12\times10^{-9}\times5\times(10^2)^3}{24\times10^{-2}}$$

$$=\frac{\cancel{12}\times10^{-9}\times5\times10^6}{2\times\cancel{12}\times10^{-2}}$$

$$=\frac{5\times10^{-3}}{2\times10^{-2}}$$

$$=\frac{5\times10^{-1}}{2}$$

$$=\frac{5}{2\times10}=\frac{\cancel{5}}{2\times2\times\cancel{5}}=\boxed{2^{-2}}$$

Exercice 3

1. $1 < a < 2$
$-5 < b < -3$
donc $\boxed{-4 < a+b < -1}$

2. $-5 < b < -3$
donc $3 < -b < 5$
$1 < a < 2$
donc $\boxed{4 < a-b < 7}$

3. $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$
donc $\underline{-4 < -2a < -2}$ donc $\underline{-15 < 3b < -9}$
donc: $\boxed{-19 < 3b-2a < -11}$

4. $-5 < b < -3$
$a > 0$ donc $-5a < ab < -3a$
$1 < a < 2$
donc : $-10 < -5a$. et $-3a < -3$
donc $\boxed{-10 < ab < -3}$

5. $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ st strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et $-5, b, -3 < 0$
donc $-\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < -\frac{1}{5}$
$a > 0$ donc $-\frac{a}{3} < \frac{a}{b} < -\frac{a}{5}$
$1 < a < 2$
donc, $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}a$ et $-\frac{1}{5}a < -\frac{1}{5}$
donc $\boxed{-\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < -\frac{1}{5}}$

$(x \mapsto \frac{1}{x})$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $1, a, 2 > 0$

donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1$

$b < 0$ donc $b < \frac{b}{a} < \frac{b}{2}$

$-5 < b < -3$ donc : $-5 < b$ et $\frac{1}{2} b < -\frac{3}{2}$

donc : $\boxed{-5 < \frac{b}{a} < -\frac{3}{2}}$

7. $(x \mapsto x^2)$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $-5, b, -3 \leq 0$

donc $(-3)^2 < b^2 < (-5)^2$

$\boxed{9 < b^2 < 25}$

8. • $(x \mapsto \frac{1}{x})$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $9, b^2, 25 > 0$

donc $\frac{1}{25} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{9}$ et $\sqrt{a-1} \geq 0$ donc $\frac{\sqrt{a-1}}{25} \leq \frac{\sqrt{a-1}}{b^2} \leq \frac{\sqrt{a-1}}{9}$

• $1 < a < 2$ donc $0 < a-1 < 1$

$(x \mapsto \sqrt{x})$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $0, a-1, 1 \geq 0$

donc $\sqrt{0} \leq \sqrt{a-1} \leq \sqrt{1}$

$0 \leq \sqrt{a-1} \leq 1$

$\sqrt{a-1} \geq 0$ donc $0 \leq \frac{\sqrt{a-1}}{25}$ et $\frac{\sqrt{a-1}}{9} \leq \frac{1}{9}$

Conclusion : $\boxed{0 \leq \frac{\sqrt{a-1}}{b^2} \leq \frac{1}{9}}$

Exercice 4

/5

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$= \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}$

$= \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ✓

(BONUS : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0 \Leftrightarrow \sqrt{n+1}=\sqrt{n} \underset{??}{\Leftrightarrow} n+1=n \Leftrightarrow 0=1$ FAUX

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \neq 0$)

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2 \geq 0$ donc $\boxed{\sqrt{(x^2+2)^2} = x^2+2}$

(b) . Signe de x^2+3x+1 :

$\Delta = 9-4 = 5 > 0$ donc 2 racines réelles : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+3x+1		+	0	−	0	+	

* Si $x \in \left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$: $\sqrt{(x^2+3x+1)^2} = x^2+3x+1$

* Si $x \in \left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[$; $\sqrt{(x^2+3x+1)^2} = -x^2-3x-1$

Exercice 5

(1.) $1^2 - (\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 0.$

donc 1 est racine évidente et l'autre est $\sqrt{2}$

Conclusion : $\boxed{S =]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$ ($\sqrt{2} \approx 1{,}4$ donc $\sqrt{2} \geq 1$)

(2.) Ensemble de résolution : $x - 1 \neq 0$ et $2 - \frac{x}{x-1} \neq 0$.

$\forall x \neq 1, \quad 2 - \frac{x}{x-1} = 0 \iff \frac{2(x-1) - x}{x-1} = 0$

$\iff 2x - 2 - x = 0$

$\iff x - 2 = 0$

$\iff x = 2$

Donc on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$:

$\frac{6}{2 - \frac{x}{x-1}} = (x-1)^2 \iff \frac{6}{\frac{x-2}{x-1}} = (x-1)^2$

$\iff \frac{6(x-1)}{x-2} = (x-1)^2$

$\iff 6(x-1) = (x-1)^2 (x-2)$ car $x - 2 \neq 0$.

$\iff 6 = (x-1)(x-2)$ car $x - 1 \neq 0$

$\iff 6 = x^2 - 3x + 2$

$\iff x^2 - 3x - 4 = 0.$

(-1) est racine évidente et l'autre est 4.

et $(-1) \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ et $4 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ donc $\boxed{S = \{-1, 4\}}$

Exercice 6.

(1.) * si $m = -3$

$$P_m(x) = -16x$$

donc une seule racine réelle (0)

* si $m \neq -3$

P_m est un trinôme du 2nd degré de discriminant :

$$\Delta_m = 4(3m+1)^2 - 4(m+3)^2$$
$$= 4\left[(3m+1)^2 - (m+3)^2\right]$$
$$= 4\left[3m+1-(m+3)\right]\left(3m+1+m+3\right]$$
$$= 4\left[2m-2\right]\left[4m+4\right).$$
$$= 4\times 2\times 4\,(m-1)(m+1)$$
$$= 32(m^2-1)$$

m	$-\infty$		-1		1	3		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$\|$	$+$	
nb de racines réelles		2	1	0	1	$\|$	2	

$(m \neq -3)$

(2.) P_m a 2 racines réelles donc $m \neq -3$ d'après la question précédente.

$$P_m(x) = (m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3)$$

donc le produit $P = \frac{m+3}{m+3}$ $(m \neq -3)$ soit $\boxed{P = 1}$

et la somme : $\boxed{S = \frac{-2(3m+1)}{m+3}}$ $(m \neq -3)$

Exercice 7

(1.) $\Delta = 4 - 4\times(-1) = 8 > 0$

donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

et $x_2 = 1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2.) Par récurrence sur $n \geq 5$: $2^n > n^2$

* $n=5$

$2^5 = 2^3 \times 2^2 = 4\times 8 = 32$ et $5^2 = 25$ donc $2^5 > 5^2$ V

* $n \geq 5$

Supposons que $2^n > n^2$ à un certain rang n

Montrons que $2^{n+1} > (n+1)^2 \iff 2^{n+1} > n^2+2n+1$

$2^{n+1} = 2^n \times 2$

or par (HR), $2^n > n^2$ donc $2^{n+1} > 2n^2$

or $\forall x \geq 1+\sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$\sqrt{2} \simeq 1,4$ donc si $n \geq 5$, $n > 1+\sqrt{2}$ donc $n^2 - 2n - 1 > 0$

$n^2 > 2n+1$

$2n^2 > n^2 + 2n + 1$

donc $2^{n+1} > (n+1)^2$ V

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \geq 5$, $2^n > n^2$

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ (17)

Par récurrence sur $n \geq 2$: $u_n > 1$

* $n = 2$.
$$u_2 = \sqrt{u_1} + \frac{1}{1+1} = \sqrt{u_1} + \frac{1}{2}$$

avec $u_1 = \sqrt{u_0} + \frac{1}{0+1} = \sqrt{u_0} + 1 \geq 1$

$(x \mapsto \sqrt{x})$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $u_1, 1 \geq 0$

donc $\sqrt{u_1} \geq \sqrt{1}$

$\sqrt{u_1} \geq 1$

donc $u_2 \geq 1 + \frac{1}{2}$

$u_2 \geq \frac{3}{2} > 1$: récurrence initialisée

* $n \geq 2$: Supposons que $u_n > 1$ à un certain rang n.
Montrons que $u_{n+1} > 1$.

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

or par (HR), $u_n > 1$ et $(x \mapsto \sqrt{x})$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
et $u_n, 1 \geq 0$

donc $\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$

$\sqrt{u_n} > 1$

donc $u_{n+1} > 1 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0} > 1$ ✓

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \geq 2$, $u_n > 1$