

DS 7 – Mathématiques

Mercredi 2 avril 2025

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices et d'un problème.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. (langage python)

1. Tri par insertion : écrire l'algorithme et l'expliquer sur l'exemple $[0, 9, 6, -1]$
2. Écrire une fonction `somme_carres(A)` d'argument un tableau A et qui renvoie la somme des carrés des coefficients de A

Exercice 2. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f_n .
2. Dresser le tableau de variations de f_n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$
(c) On pose la fonction $g(x) = x \ln(x)$ pour tout $x > 0$. Étudier les variations de g .
En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$
(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$
En déduire un équivalent simple de u_n

Exercice 3. On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.

L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour sur cette période dépend du temps qu'il fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$

On s'intéresse à une période dont le premier jour il a fait beau. Soit $n \geq 1$.

1. Déterminer la probabilité qu'il fasse beau les n premiers jours.

2. Déterminer la probabilité qu'il fasse beau au moins deux fois au cours des n premiers jours.

PROBLÈME

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On s'intéresse dans ce problème au moment où apparaissent pour la première fois deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel k non nul, on note les événements :

- P_k : " on obtient pile au k ème lancer "
- F_k : " on obtient face au k ème lancer "

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "deux piles consécutifs apparaissent pour la première fois aux lancers n et $n + 1$ ". On pose alors :

- Pour tout entier naturel n non nul, $a_n = P(A_n)$, la probabilité de A_n .
- Par convention, $a_0 = 0$.

I. Calculs préliminaires

On considère l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} = 0$$

1. Montrer que l'équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , avec $r_1 < r_2$.
2. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$
3. Montrer que : $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$ puis que $|r_1| < |r_2| < 1$.

II. Équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$

1. Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
2. (a) Justifier que : $P_{P_1}(A_{n+2}) = \frac{2}{3}a_n$ et $P_{F_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{9} \frac{1}{r_2 - r_1} (r_2^n - r_1^n)$
4. (a) Donner la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$
(b) Déterminer un équivalent simple de a_n .