

## DS 8 – Mathématiques

Mercredi 28 mai 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de quatre exercices.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

### Exercice 1. (langage python)

On lance vingt fois une pièce de monnaie. La probabilité d'avoir Pile est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

1. Écrire une fonction `nombre_Piles(p)` qui renvoie le nombre de Pile obtenus.
2. Écrire une fonction `premier_Pile(p)` qui renvoie le numéro du lancer où apparaît le premier Pile, 0 si on n'obtient que des Face
3. Écrire une fonction `proba` qui renvoie une valeur approchée de la probabilité d'obtenir cinq Piles.

### Exercice 2. On considère la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^4 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .  $g$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  ?

### Exercice 3. Étudier complète de la fonction $f$ (ensemble de définition, variations, limites, éventuels prolongements par continuité, branches infinies, allure graphique) :

$$f(x) = \sqrt{x+1} \ln(x+1)$$

### Exercice 4. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice suivante dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , et déterminer la matrice qui représente  $f^{-1}$  dans la base canonique.
2. On considère la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1))$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$
  - (b) Déterminer la matrice qui représente  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Montrer que  $f^2 = 3f - 2 \text{id}$ . Retrouver le résultat de la question 1.
  4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n) \text{id}$