DS2_ Mathématiques.
9/10/2024.

Exercice 2

(1.)

$$\frac{a}{k!}+\frac{b}{(k+1)!}+\frac{c}{(k-1)!}=\frac{a(k+1)+b+ck(k+1)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{ck^2+(a+c)k+(a+b)}{(k+1)!}$$

On prend a, b, c tels que :

$$\begin{cases} c=1 \\ a+c=-1 \\ a+b=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=1 \\ a=-1-c=-2 \\ b=-1-a=1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\frac{k^2-k-1}{(k+1)!}=\frac{-2}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k-1)!}}$

(2.)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k-1}{(k+1)!}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}$$

$$\underset{k'=k+1}{=}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}$$

$$\underset{j=k-1}{=}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$=-2\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{n!}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!}+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \cancel{-2} - \frac{2}{n!} + (1 + \cancel{1-2}) \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cancel{1} \cancel{+1}$$

$$= -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{-n \cancel{-1} \cancel{+1}}{(n+1)!} = \boxed{-\frac{n}{(n+1)!}}$$

Exercice 3

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k q^k = \frac{q}{(q-1)^2} \left(n q^{n+1} - (n+1) q^n + 1 \right)$$

$\underline{\text{à } n=0}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k q^k = 0 q^0 = 0.$

$$\frac{q}{(q-1)^2} \left(0 q^{0+1} - (0+1) q^0 + 1 \right) = \frac{q}{(q-1)^2} \left(0 - 1 + 1 \right) = 0 \quad \checkmark$$

récurrence initialisée.

$\underline{\text{à } n \geq 0.}$ Sq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k q^k = \frac{q}{(q-1)^2} \left(n q^{n+1} - (n+1) q^n + 1 \right)$ à un certain rang n,

mq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k q^k = \frac{q}{(q-1)^2} \left((n+1) q^{n+2} - (n+2) q^{n+1} + 1 \right).$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k q^k = \sum_{k=0}^{n} k q^k + (n+1) q^{n+1}$$

$$\underset{(HR)}{=} \frac{q}{(q-1)^2} \left(n q^{n+1} - (n+1) q^n + 1 \right) + (n+1) q^{n+1}$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2} \left(n q^{n+1} - (n+1) q^n + 1 + (n+1) q^n (q-1)^2 \right)$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2}\left(n q^{n+1} - \cancel{(n+1)q^n} + (n+1)q^{n}\left(q^2 - 2q \cancel{+1}\right) + 1\right)$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2}\left(n q^{n+1} + (n+1) q^{n+2} - 2(n+1) q^{n+1} + 1\right)$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2}\left((n+1) q^{n+2} - (n+2) q^{n+1} + 1\right) \quad \checkmark$$

$-2n-2+n$
$= -n-2$
$= -(n+2)$

Récurrence achevée.

Exercice 4

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

* $\underline{n=0}$ $\quad 2\times 0 + \frac{1}{3^0} = 0 + 1 = 1 = u_0 \ \checkmark$

* $\underline{n \geq 0}$ $\quad$ Sq $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ à un certain rang n.

Mq $u_{n+1} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 4n + 6\right) \underset{(HR)}{=} \frac{1}{3}\left(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(6n + 6 + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \frac{6(n+1)}{3} + \frac{1}{3^{n+1}} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \checkmark$$

récurrence achevée

Exercice 5

Par récurrence (double) sur $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq n^2$

* $\underline{n=1}$: $u_1 = 1$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$ V

* $\underline{n=2}$: $u_2 = u_1 + \frac{2}{2} u_0 = 1 + 1 \times 1 = 2$ donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$ V

récurrence initialisée

* Sq $1 \leq u_n \leq n^2$ et $1 \leq u_{n-1} \leq (n-1)^2$ à un certain rang $n \geq 1$.

Mq $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$

Par HR, $1 \leq u_{n-1} \leq (n-1)^2$

$\frac{2}{n+1} \geq 0$ $\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} u_{n-1} \leq \frac{2}{n+1}(n-1)^2$

et par HR : $1 \leq u_n \leq n^2$

donc $1 \leq 1 + \frac{2}{n+1} \leq u_{n+1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2$.

or $n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \leq (n+1)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{n^2} + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \leq \cancel{n^2} + 2n + 1$

$\Leftrightarrow$ $(n+1>0)$ $2(n-1)^2 \leq (2n+1)(n+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{2n^2} - 4n + 2 \leq \cancel{2n^2} + 3n + 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq 7n$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{7}$ VRAI car $n \geq 1$

récurrence achevée.

Exercice 6

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$ donc $|x^2+1| = x^2+1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $2x^2-x+1$: $\Delta = 1-8<0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2-x+1>0$

donc $|2x^2-x+1| = 2x^2-x+1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

- Conclusion :

* si $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$,

$$|x^2-1| - |x^2+1| + |2x^2-x+1| = x^2-1-\cancel{x^2}-\cancel{1}+2x^2-x+\cancel{1}$$
$$= 2x^2-x-1$$

* si $x \in]-1,1[$

$$|x^2-1| - |x^2+1| + |2x^2-x+1| = \cancel{1}-x^2-\cancel{x^2}-\cancel{1}+\cancel{2x^2}-x+1$$
$$= -x+1$$

Exercice 7

Ensemble de résolution : $\overset{\text{et } x\neq 0}{2x-\frac{3}{x}>0} \Leftrightarrow \frac{2x^2-3}{x}>0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2x^2-3$	+	0	−	|	−	0	+	
x	−	|	−	0	+	|	+	
$\frac{2x^2-3}{x}$	−	0	+	||	−	0	+	

Donc on résout sur $]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0[\cup]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[$

$(E) \Leftrightarrow 2x-\frac{3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3-x}{x} \geq 0$

-1 et $\frac{3}{2}$ sont les racines de $2x^2-x-3$ donc :

x	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	//		$+$		$+$	
$2x^2-x-3$	0	$+$	0	$-$		//	0	$-$	0	$+$	
$\frac{2x^2-x-3}{x}$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	//	0	$-$	0	$+$	

$\left(\begin{array}{l} \cdot\ \frac{3}{2} > 1 \text{ donc } \sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} \ ; \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \text{ donc } -\sqrt{\frac{3}{2}} < -1 \\ \cdot\ \frac{9}{4} > \frac{3}{2} \text{ donc } \frac{3}{2} > \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{array}\right)$

Conclusion: $\boxed{S = [-1, 0[\cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[}$

Exercice 8.

(1.) Par récurrence forte sur $n \geq 2$: $u_n = (n+1)!$

* $n=2$: $u_1 = \sum_{k=0}^{0} (k+1) u_k = (0+1) u_0 = 2.$

$u_2 = \sum_{k=0}^{1} (k+1) u_k = (0+1) u_0 + (1+1) u_1$

$= u_0 + 2u_1 = 2 + 4 = 6 = 3!$ ✓
$= (2+1)!$

récurrence initialisée

* $n \geq 2$. Sq $u_k = (k+1)!$ $\forall\ 2 \leq k \leq n$ à un certain rang n

Mq $u_{n+1} = (n+2)!$

$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) u_k = u_0 + 2u_1 + \sum_{k=2}^{n} (k+1) u_k$

$\underset{(HR)}{=} 2 + 2\times 2 + \sum_{k=2}^{n} (k+1)(k+1)!$

$$u_{n+1} = 6 + \sum_{k=2}^{n} \left((k+2) - 1 \right) (k+1)!$$

$$= 6 + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{(k+2)(k+1)!}_{(k+2)!} - \sum_{k=2}^{n} (k+1)!$$

$$= 6 + \underbrace{\sum_{k=4}^{n+2} k!}_{k' = k+2} - \underbrace{\sum_{k=3}^{n+1} k!}_{j = k+1}$$

$$= \cancel{6} + (n+2)! + \cancel{\sum_{k=4}^{n+1} k!} - \underbrace{\cancel{3!}}_{=6} - \cancel{\sum_{k=4}^{n+1} k!}$$

$$= (n+2)! \quad ✓$$

récurrence achevée

2.

(a) Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

$n = 0$: $u_0 = 2 > 0$ ✓

récurrence initialisée

$n \geq 0$ Sq à un certain rang n : $u_k > 0 \; \forall \, 0 \leq k \leq n$.

Mq $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) u_k$$

or par (HR), $u_k > 0$ $\forall \, 0 \leq k \leq n$ et $(k+1) > 0$ donc en sommant : $u_{n+1} > 0$ ✓

récurrence achevée.

(b) $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) u_k}_{u_{n-1}} + n \, u_{n-1}$

donc $u_n = (n+1) u_{n-1}$ ✓