DS4 _ Mathématiques.
11/12/2024.

Exercice 2

(1.) $\lim\limits_{x \to 3} 2x^2-3x+2 = 11 > 0$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -\infty}$

(2.) $\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)}$

$\dfrac{x^2+1}{x-3} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = x \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

(3.) $\dfrac{x^2+e^{x^3}}{x^3+5} = \dfrac{e^{x^3}\left(x^2e^{-x^3}+1\right)}{x^3\left(1+\frac{5}{x^3}\right)} = \dfrac{e^{x^3}}{x^3} \quad \dfrac{x^2e^{-x^3}+1}{1+\frac{5}{x^3}}$

. soit $X = x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$: $\dfrac{e^{x^3}}{x^3} = \dfrac{e^X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ par C.C

. $x^2e^{-x^3} = \dfrac{x^{2/3}e^{-x^3}}{x}$ par C.C, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/3}e^{-x^3} = 0$ $(X = x^3)$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x^3} = 0.$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Exercice 3

- $f(x)$ bien défini ssi $e^{2x} - 1 \neq 0$.

$$e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

donc $\underline{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-2x} + 1}{e^{-2x} - 1} = \frac{\cancel{e^{-2x}}\left(1 + e^{2x}\right)}{\cancel{e^{-2x}}\left(1 - e^{2x}\right)} = -\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = -f(x)$$

Donc $\underline{f \text{ est impaire}}$: il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$

Puis on récupère toute la courbe par symétrie centrale de centre O.

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(e^{2x} - 1\right) - \left(e^{2x} + 1\right)2e^{2x}}{\left(e^{2x} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}}{\left(e^{2x} - 1\right)^2}\left(\cancel{e^{2x}} - 1 - \cancel{e^{2x}} - 1\right)$$

$$= -\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x} - 1\right)^2} < 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

par imparité

en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} e^{2x} + 1 = 2 > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$	

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\cancel{e^{2x}}\left(1 + e^{-2x}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1 - e^{-2x}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Eléments remarquables :

- $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale : $y = -1$
- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x = 0$
- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = 1$