

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \frac{1}{5-3\sqrt{2}} + \frac{3-3\sqrt{2}}{7} &= \frac{5+3\sqrt{2}}{(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})} + \frac{3-3\sqrt{2}}{7} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{2}}{5^2 - (3\sqrt{2})^2} + \frac{3-3\sqrt{2}}{7} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{2}}{25-18} + \frac{3-3\sqrt{2}}{7} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{2}}{7} + \frac{3-3\sqrt{2}}{7} \\
 &= \boxed{\frac{8}{7}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 45 \times 100} &= \frac{2^5 \times \cancel{5^2} \times 3^{-4} \times \cancel{2^2} \times 3^2}{3^8 \times 5 \times 3^2 \times \cancel{2^2} \times \cancel{5}} \\
 &= \frac{2^5 \times 3^{-2}}{5 \times 3^{10}} \\
 &= \boxed{\frac{2^5}{5 \times 3^{12}}}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

① On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$	3	$+\infty$
x	-	○	+	+	+	+
$7x-4$	-	-	-	○	+	+
$1-3x$	+	+	○	-	-	-
$x-3$	-	-	-	-	○	+
quotient	-	○	+	○	+	-

$$S =]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{4}{7}, 3[$$

$$\left(\frac{4}{7} = \frac{12}{21} > \frac{1}{3} = \frac{7}{21} \right)$$

② On résout sur $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow (x-3)(x+3)(2x+1) - (x-3)(2x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(x+3 - (2x+1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(x+3 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(-x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x=2$$

$$S = \left\{ 3, -\frac{1}{2}, 2 \right\}$$

(3.)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on pose } X = x^2 \geq 0$$

$$\text{donc } 3x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3X^2 - X - 2 = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$1 \text{ est racine évidente et l'autre est } -\frac{2}{3} \quad \left(1 \times -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{donc (3) (6) } X = 1 \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } X = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$Y = \{-1, 1\}$$

(4.)

$$\text{Ensemble de résolution: } x-1 \neq 0 \text{ et } 6 - \frac{3}{x-1} \neq 0.$$

$$6 - \frac{3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{6(x-1)-3}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-9}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x-9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc on résout sur } \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}:$$

$$(4) \Leftrightarrow x + \frac{2}{\frac{6x-9}{x-1}} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{2(x-1)}{6x-9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(6x-9) + 2(x-1)}{6x-9} = 1$$

$$\Leftrightarrow x(6x-9) + 2(x-1) = 6x-9.$$

$$(\Rightarrow) x(6x-9) + 2(x-1) - (6x-9) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) (x-1)(6x-9) + 2(x-1) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) (x-1)[6x-9+2] = 0$$

$$(\Leftrightarrow) (x-1)(6x-7) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) x=1 \notin \mathbb{N} \setminus \{1, \frac{3}{2}\} \text{ ou } x = \frac{7}{6} \notin \mathbb{N} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}.$$

Donc $\boxed{S = \left\{ \frac{7}{6} \right\}}$

Exercice 3

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=1$ $u_1 = \frac{1}{5} u_0 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5}$

et $\frac{15}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{15}{8}$

$$\frac{17}{5} = \frac{17 \times 8}{40} = \frac{136}{40} \quad \text{et} \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \times 4}{40} = \frac{60}{40}$$

donc $u_1 \geq \frac{15}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$; récurrence initialisée

$n \geq 1$ Supposons que $u_n \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ à un certain rang n .

Montrons que $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$u_n \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ par (H.A.)}$$

$$\text{donc } \frac{1}{5} u_n \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{car } \frac{1}{5} \geq 0)$$

$$\frac{1}{5} u_n + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{4} + 3\right)$$

$$\left(\frac{3}{4} + 3 = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4}\right)$$

$$u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{or } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \quad \text{donc } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) \leq 0$$

$$\text{donc } \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{donc } u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \checkmark$$

Conclusion: par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 4

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}$

$n=1$ $u_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1-1}{3} = \frac{1}{2}$: récurrence initialisée

$n \geq 1$ Supposons que $u_n = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}$ à un certain rang n .

Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{n}{3}$.

$$u_{n+1} = \frac{n}{2+n} u_n + \frac{1+n}{2+n}$$

$$\stackrel{(\text{H.R.})}{=} \frac{n}{2+n} \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}\right) + \frac{1+n}{2+n}$$

(tout le monde
passe la)

$$= \frac{n}{2(2+n)} + \frac{n(n-1)}{3(2+n)} + \frac{1+n}{2+n}$$

$$= \frac{3n + 2n(n-1) + 6(n+1)}{6(2+n)}$$

$$= \frac{2n^2 + 7n + 6}{6(2+n)}$$

or

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{3} = \frac{3+2n}{6} = \frac{(3+2n)(2+n)}{6(2+n)} \\ = \frac{2n^2 + 7n + 6}{6(2+n)}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{n}{3} \quad \checkmark$$

Conclusion: Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}$

Exercice 5:

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$

$$\text{• } \underline{n=1} \quad \sum_{k=1}^{2 \times 1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^2 (-1)^k k = (-1)^1 \times 1 + (-1)^2 \times 2 \\ = -1 + 2 = 1$$

et $n=1$: récurrence initialisée.

• $n \geq 1$ Supposons que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$ à un certain rang n .

Montrons que $\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k = n+1$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k + (-1)^{2n+1} (2n+1) + (-1)^{2n+2} (2n+2)$$

$$\stackrel{(\text{H.R.})}{=} n - (2n+1) + 2n+2$$

$$= n - 2n - 1 + 2n + 2$$

$$= n + 1 \quad \checkmark$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$