

Exercice 1

① $\forall x \in \mathbb{R},$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+3-7x-5)(2x+3+7x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-5x-2)(9x+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x-2=0 \text{ ou } 9x+8=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ ou } x = -\frac{8}{9}$$

$$J = \left\{ -\frac{2}{5}, -\frac{8}{9} \right\}$$

② On résout sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{4+x}{1-2x} > 3 \Leftrightarrow \frac{2(4+x)}{1-2x} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(4+x)}{1-2x} - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(4+x) - 3(1-2x)}{1-2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5+8x}{1-2x} > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$5+8x$	-	0	+	+
$1-2x$	+	+	0	-
$\frac{5+8x}{1-2x}$	-	0	+	-

$$J =]-\frac{5}{8}, \frac{1}{2}[$$

3.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $X = x^2$

donc (3) $\Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{2}X - 3 = 0, X \geq 0$

2 racines évidentes et l'autre est $-\frac{3}{2}$
 $(2 \times a = -3)$

donc (3) $\Leftrightarrow X = 2 > 0$ ou $X = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$$J = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Exercice 2

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

$n=0$ $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$ donc récurrence initialisée

$n \geq 0$ Supposons que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ à un certain rang n .

$$\text{Montrons que } u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}.$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \quad (\text{H.R.}) \quad \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} \quad (\text{tout le monde va piquer la})$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2+2n+1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$= \frac{2}{2n+3} : \text{récurrence achevée.}$$

Exercice 3

①

$$\begin{array}{l} -2 < a < -1 \\ 2 < -2a < 4 \end{array} \quad \downarrow -2 < 0$$

donc

$$7 < b - 2a < 13$$

②

$$\begin{array}{l} -2 < a < -1 \\ (n+1)^2 \leq n^2 \quad \text{sur }]-\infty, 0] \text{ et } \begin{array}{l} -2 \leq 0 \\ a \leq 0 \\ -1 \leq 0 \end{array} \end{array}$$

donc

$$1 < a^2 < 4$$

donc

$$6 < a^2 + b < 13$$

(3.)

$$\begin{array}{c|c} -2 < a < -1 & 5 < 3 < 9 \\ & \downarrow -1 < 0 \\ 1 < -a < 2 & 15 < 35 < 27 \end{array} \quad \downarrow 3 > 0$$

$$\text{dnc} \quad 16 < 35 - a < 29$$

$$(x \mapsto \sqrt{x}) \uparrow \text{ sur } [0, +\infty[\quad \text{et} \quad \begin{array}{l} 16 > 0 \\ 35 - a > 0 \\ 29 > 0 \end{array}$$

$$\text{dnc} \quad \sqrt{16} < \sqrt{35 - a} < \sqrt{29}$$

$$\boxed{4 < \sqrt{35 - a} < \sqrt{29}}$$

(4.)

$$-2 < a < -1$$

$$3 < a + 5 < 4$$

$$(x \mapsto \frac{1}{x}) \downarrow \text{ sur }]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \begin{array}{l} 3 > 0 \\ a + 5 > 0 \\ 4 > 0 \end{array}$$

$$\text{dnc} \quad \boxed{\frac{1}{4} < \frac{1}{a+5} < \frac{1}{3}}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{j=1}^n (j + n^4) &= \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n n^4 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n^4 \times n \\ &= \frac{n(n+1) + 2n^5}{2} = \frac{n}{2} (n+1 + 2n^4) \end{aligned}$$

(2.)

$$\sum_{k=2}^{n+4} 3^k 2^{k+n} = 2^n \sum_{k=2}^{n+4} 6^k$$

$$= 2^n \frac{6^2 - 6^{n+5}}{1-6}$$

(6 ≠ 1)

$$= -\frac{2^n}{5} \times 6^2 (1 - 6^{n+3})$$

(3.)

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{i^2-3}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n+1} i^2 - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{n+1} i^2 - 1 \right) - \frac{3}{4} (n+1-2+1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1 \right) - \frac{3n}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3) - 6}{6} - 3n \right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3) - 6 - 18n}{24}$$

(4.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2k-1}}{7^{k+1}} = \frac{(-3)^{-1}}{7} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2k}}{7^k} = -\frac{1}{3 \times 7} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{7} \right)^k$$

(9/7 ≠ 1)

$$= -\frac{1}{21} \frac{\frac{9}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{7}} = -\frac{1}{21} \times \frac{9}{7} \times \left(1 - \left(\frac{9}{7}\right)^n\right) \times \frac{7}{-2}$$

$$= \frac{3}{14} \left(1 - \left(\frac{9}{7}\right)^n\right)$$