à rendre lundi 6 octobre au plus tard

Exercice 1.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\sqrt{u_k} + \sqrt{u_n} + 1$$

1. Calcule u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n pour tout entier naturel n et la démontrer.

Exercice 2.

Soit la suite u définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k}\,.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1$.

Exercice 3.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\,.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n$.