DM2 - Corrigé
31/10/2025

## Exercice 1

1. $$\frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3!} = \frac{10\times \cancel{3}\times 3\times \cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times \cancel{3}} = 30\times 4 = \boxed{120}$$

2. $$\prod_{k=1}^{n} \frac{3}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 3}{\prod_{k=1}^{n} k} = \boxed{\frac{3^n}{n!}}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\sqrt{7}\right)^{n-2k} 3^k = \left(\sqrt{7}\right)^n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k}{\left(\sqrt{7}\right)^{2k}}$$

$$= \left(\sqrt{7}\right)^n \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{3}{7}\right)^k$$

$$\underset{\frac{3}{7}\neq 1}{=} \left(\sqrt{7}\right)^n \frac{\frac{3}{7} - \left(\frac{3}{7}\right)^{n+2}}{1-\frac{3}{7}}$$

$$= \left(\sqrt{7}\right)^n \times \cancel{7} \times \frac{3}{\cancel{7}} \left(1 - \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}\right) \times \frac{1}{4}$$

$$= \boxed{\left(\sqrt{7}\right)^n \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}\right)}$$

## Exercice 2

1. $$\frac{a}{k!} + \frac{b}{(k+1)!} = \frac{a(k+1)+b}{(k+1)!} = \frac{ak + (a+b)}{(k+1)!}$$

donc on prend $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0. \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1}$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\underset{k'=k+1}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{1!} + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}} - \cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Exercice 3.

Par récurrence sur $n \geq 4$ : $2^n \leq n!$

$\underline{n=4}$ : $2^4 = 16$ et $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
donc récurrence initialisée

$\underline{n \geq 4}$ : Supposons que $2^n \leq n!$ à un certain rang $n$.
Mq $2^{n+1} \leq (n+1)!$

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 \underset{\substack{(HR) \\ \text{et } 2>0}}{\leq} n! \times 2$$

or $(n+1)! = n! \times n$
et $n \geq 4$
donc $(n+1)! \geq 4n! \geq 2n!$ ✓

récurrence achevée ✓

## Exercice 4

1

Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = -1 + n(n-1)$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{* \, n=0 :} & u_0 = -1 \text{ et } -1 + 0\times(-1) = -1 \ \checkmark \\ \underline{* \, n=1} & u_1 = -1 \text{ et } -1 + 1\times 0 = -1 \ \checkmark \end{array}\right\} \text{ récurrence initialisée}$$

* $\underline{n \geq 0.}$ Supposons que : $u_n = -1 + n(n-1)$ et $u_{n+1} = -1 + (n+1)n$ à un certain rang $n$.

Montrons que : 
$$u_{n+2} = -1 + (n+2)(n+1)$$
$$= -1 + n^2 + 3n + 2$$
$$= n^2 + 3n + 1$$

$$u_{n+2} = (n+1)\,u_{n+1} - (n+2)\,u_n$$
$$\underset{(HR)}{=} (n+1)\left(-1 + n(n+1)\right) - (n+2)\left(-1 + n(n-1)\right)$$
$$= (n+1)\left(n^2 + n - 1\right) - (n+2)\left(n^2 - n - 1\right)$$
$$= (1 - 1)\,n^3 + (1 + 1 + 1 - 2)\,n^2 + (-1 + 1 + 1 + 2)\,n + (-1 + 2)$$
$$= n^2 + 3n + 1 \ \checkmark$$

récurrence double achevée.