

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u_1 &= 2 \sum_{k=0}^0 \sqrt{u_k} + \sqrt{u_0+1} = 2\sqrt{u_0} + \sqrt{u_0+1} = \underline{1} \\
 u_2 &= 2 \sum_{k=0}^1 \sqrt{u_k} + \sqrt{u_1+1} = 2(\sqrt{u_0} + \sqrt{u_1}) + \sqrt{u_1+1} = \underline{4} \\
 u_3 &= 2 \sum_{k=0}^2 \sqrt{u_k} + \sqrt{u_2+1} = 2(\sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}) + \sqrt{u_2+1} \\
 &= 2 \times 3 + 2 + 1 = \underline{9}
 \end{aligned}$$

FORTE :

(2) Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2$

• $n=0$ $u_0 = 0$ et $0^2 = 0 \checkmark$ récurrence initialisée.

• $n \geq 0$ Supposons que à un certain rang n : $u_k = k^2 \quad \forall 0 \leq k \leq n$.

Montrons que $u_{n+1} = (n+1)^2$

$$u_{n+1} = 2 \sum_{k=0}^n \sqrt{u_k} + \sqrt{u_n+1} \stackrel{(\text{H.R.})}{=} 2 \sum_{k=0}^n \sqrt{k^2} + \sqrt{n^2+1}$$

⚠ or $k \geq 0$ et $n \geq 0$ donc $\sqrt{k^2} = |k| = k$ et $\sqrt{n^2+1} = |n| = n$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } u_{n+1} &= 2 \sum_{k=0}^n k + n + 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
 &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

récurrence achevée

Exercice 2

Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^+$; $u_n > u_1$.

• $n=1$: $u_1 > u_1 \vee$

• $n \geq 1$: Supposons que à un certain rang n : $u_k > u_1 \forall 1 \leq k \leq n$

Montrons que $u_{n+1} > u_1$

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u_k}{k} = \frac{u_1}{1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{u_k}{k}$$

or $u_k > u_1 > 0$ par Hk

donc $\frac{u_k}{k} > 0$ ($k > 0$)

donc $\sum_{k=2}^n \frac{u_k}{k} > 0$ (somme)

donc $u_{n+1} > u_1 \vee$

récurrence achevée

Exercice 3

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^+$: $u_n = 3n$

• $n=1$: $u_1 = 3$ et $3 \times 1 = 3 \vee$

• $n \geq 1$: Supposons que à un certain rang n : $u_k = 3k \forall 1 \leq k \leq n$

Montrons que $u_{n+1} = 3(n+1) = 3n+3$.

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k \stackrel{(Hk)}{=} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 3k = \frac{2 \times 3}{n} \frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1) \vee$$

récurrence achevée $\vee$