Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2025/2026
Mme MOREL

DS 2 – Mathématiques

Mercredi 8 octobre 2025

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). **:**

1. Écrire une fonction `DS2(x)` d'argument un réel x et qui renvoie :
   - $\dfrac{\ln(x)-2}{3}$, si $x>0$
   - $\sqrt{|x|}$, si $x \leqslant 0$
2. Écrire une fonction `test(n)` d'argument un entier naturel n , et qui renvoie :
   - `True` si le reste de la division euclidienne de n par 6 vaut 0,
   - `False` sinon

   (cette fonction teste donc si n est multiple de 6...)

Exercice 2. :

1. Simplifier (en une seule exponentielle) : $\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)\,\exp\left(\frac{1}{x^2-x}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}$
2. Montrer que pour tout réel x : $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \leqslant e^{|x|}$

Exercice 3. : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3x^2-2x-8} < |1-x|$
2. $\sqrt{2\,\ln(x)+3} \geqslant \ln(x)$
3. $\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) - \ln(1+x) + 2\,\ln(x) = \ln(5)$

Exercice 4. :

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \;\text{ et }\; \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = 2\,u_n + n - 1$$

1. Dans cette question, on pose : $v_n = n + u_n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire une expression de v_n puis u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}-1}{2^n} = \frac{u_n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n-1}{2^{n-1}}$
   (c) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

Exercice 6. On considère deux suites croisées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 12\,,\; v_1 = 1 \;\text{ et }\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2\,v_n}{3} \\[2ex] v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3\,v_n}{4} \end{cases}$$

1. (a) $\forall\, n \geqslant 1$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que (w_n) est géométrique.
   (b) En déduire w_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.
2. (a) $\forall\, n \geqslant 1$, on pose : $t_n = 3\,u_n + 8\,v_n$
   Montrer que (t_n) est constante.
   (b) En déduire t_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.
3. Déduire des questions précédentes, une expression de u_n et v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n non nul.