DS2 - Mathématiques.
8/10/2025
Corrigé

Exercice 2

(1.)

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}\, e^{\frac{1}{x^2-x}}}{e^{\frac{1}{x-1}}} = e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}}$$

avec $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1-x}{x^2-x} = 0$

Donc $\frac{e^{\frac{1}{x}}\, e^{\frac{1}{x^2-x}}}{e^{\frac{1}{x-1}}} = e^0 = \boxed{1}$

(2.)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \leq e^{|x|} \iff e^x+e^{-x} \leq 2e^{|x|}$ car $2>0$

- si $x \geq 0$: $|x| = x$ donc $2e^{|x|} = 2e^{x} = e^x + e^x$

donc $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \leq e^{|x|} \iff e^{-x} \leq e^{x}$

$\iff -x \leq x$

$\iff 2x \geq 0$

$\iff x \geq 0$ VRAI

donc $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \leq e^{|x|}$

- si $x < 0$: $|x| = -x$ donc $2e^{|x|} = 2e^{-x} = e^{-x}+e^{-x}$

donc $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \leq e^{|x|} \iff e^{x} \leq e^{-x} \iff x \leq -x$

$\iff 2x \leq 0$

$\iff x \leq 0$ VRAI

Conclusion. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \leq e^{|x|}}$

Exercice 3

(1.) Ensemble de résolution : $3x^2-2x-8 \geq 0$

2 et $-\frac{4}{3}$ sont racines.

x	$-\infty$		$-4/3$		2		$+\infty$
$3x^2-2x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc on résout sur $]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [2,+\infty[$

$(x \mapsto x^2)$ ↗ sur $[0,+\infty[$ et $\sqrt{3x^2-2x-8} \geq 0$

$|1-x| \geq 0$

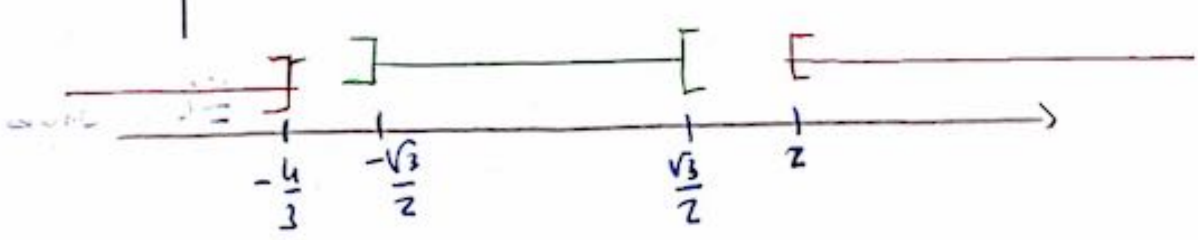
donc $(1) \Leftrightarrow 3x^2-2x-8 < |1-x|^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x-8 < (1-x)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x-8 < 1-2x+x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-9 < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	



$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} < 8 \Leftrightarrow 9 \times 3 < 64 \Leftrightarrow 27 < 64 \text{ VRAI} \right.$

$\left. \text{donc } -\frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{4}{3} \right)$

Conclusion: $\boxed{J = \emptyset}$

(2.) Ensemble de résolution : $x>0$ et $2\ln(x)+3 \geq 0$

$2\ln(x)+3 = 0 \iff \ln(x) = -\frac{3}{2} = \ln(e^{-\frac{3}{2}}) \iff x = e^{-3/2} > 0$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$2\ln(x)+3$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc <u>on résout sur $[e^{-3/2}, +\infty[$</u>

• <u>si $x<1$</u> : $\ln(x) < 0 \leq \sqrt{2\ln(x)+3}$ donc (2) est vraie

$\boxed{S_1 = [e^{-3/2}, 1[}$ $\left(e^{-3/2} = \frac{1}{e^{3/2}} < 1\right)$

• <u>si $x \geq 1$</u> : $\ln(x) \geq 0$

$(x \mapsto x^2) \nearrow$ sur $[0,+\infty[$ et $\sqrt{2\ln(x)+3} \geq 0$, $\ln(x) \geq 0$

donc (2) $\iff 2\ln x + 3 \geq (\ln x)^2$

$\iff (\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 \leq 0.$

On pose <u>$X = \ln(x)$</u> $x \geq 1$ donc <u>$X \geq 0$</u>

et (2) $\iff X^2 - 2X - 3 \leq 0$

-1 et 3 sont racines.

X	$-\infty$		-1	0		3		$+\infty$
X^2-2X-3		$+$	0	$\|$	$-$	0	$+$	

donc (2) $\iff 0 \leq X \leq 3.$

$\iff 0 \leq \ln(x) \leq 3$

$\iff \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e^3)$

$\iff 1 \leq x \leq e^3$

$\boxed{S_2 = [1, e^3]}$

Conclusion : $\boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left[e^{-3/2}, e^3\right]}$

(3.) Ensemble de résolution :

$1 - \frac{1}{x^2} > 0$ et $1 + x > 0$ et $x > 0$

$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ donc $1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

Donc on résout sur $]1, +\infty[$.

$(3) \Leftrightarrow \ln\left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \times x^2 \times \frac{1}{1+x}\right) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \times x^2 \times \frac{1}{1+x}\right) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow x - 1 = 5$

$\Leftrightarrow x = 6 > 1$ donc $\boxed{S = \{6\}}$

Exercice 4

(1.) $\forall k \geq 2$,

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k^2-1) + ck(k-1)}{(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)k^2 + (a-c)k + (-b)}{k(k^2-1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)k^2 + (a-c)k - b}{k^3 - k}$$

Donc on prend $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c-1=0 \\ a=c \\ b=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}}$$

(2.)

$\forall n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$\underset{\substack{k'=k-1 \\ j=k+1}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) + \cancel{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n(n+n) - 2(n+1) + 2n}{4n(n+1)} = \boxed{\frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}}$$

Exercice 5

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = n+1 + u_{n+1}$

$$= n+1 + 2u_n + n - 1$$
$$= 2u_n + 2n$$
$$= 2(u_n + n)$$
$$v_{n+1} = 2v_n.$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 2 \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 + 0 = 1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n \times v_0 = 2^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - n = 2^n - n$

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2u_n + n - 1 - 1}{2^n} = \frac{2u_n - 2 + n}{2^n} = \frac{2(u_n - 1)}{2^n} + \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad ✓$$

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}$

* $n = 1$. $\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} = 0$ et $\frac{u_0 - 1}{2^{0-1}} = \frac{1-1}{2^{-1}} = 0$ ✓

récurrence initialisée

* $n \geq 1$ Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}$ à un certain rang n.

Montrons que, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{u_{n+1} - 1}{2^n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad \text{par (HR)}$$

$$= \frac{2u_n - 2 + n}{2^n} = \frac{(2u_n + n - 1) - 1}{2^n} = \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} \checkmark$$

récurrence achevée

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

$$= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \checkmark .$$

Exercice 6

1. (a) $\forall n \geq 1, \ w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12}$$

$$w_{n+1} = \frac{-u_n + v_n}{12} = \frac{1}{12} w_n$$

Donc $\boxed{(w_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{12} \text{ et de premier terme } w_1 = v_1 - u_1 = 1 - 12 = -11}$

(b) $\forall n \geq 1, \ w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} (-11) = \underline{\underline{-11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}}$

(2.) (a) $\forall n \geq 1,\ t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1}$

$$= u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n)$$

$$= 3u_n + 8v_n$$

$$= t_n.$$

Donc (t_n) est constante

(b) $\underline{\forall n \geq 1}$, $t_n = t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 3\times 12 + 8\times 1$

$$= 36 + 8$$

$$\underline{\underline{t_n = 44.}}$$

(3.) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} -u_n + v_n = -11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & L_1 \\ 3u_n + 8v_n = 44 & L_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u_n + v_n = -11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \\ 11v_n = 44 - 33\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_n = v_n + 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ v_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \end{cases}}$$