

Exercice 1

On résout sur $\mathbb{R}$:

$$(*) \Leftrightarrow (e^x)^2 + 5e^x - 3 = 0 \quad \text{car } e^x \neq 0$$

$$\text{on pose } X = e^x > 0$$

$$\text{donc } (*) \Leftrightarrow X^2 + 5X - 3 = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

$$\Delta = 25 + 3 \times 4 = 25 + 12 = 37 > 0$$

$$\text{donc } (*) \Leftrightarrow X = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} \notin]0, +\infty[$$

$$\text{ou } X = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \in]0, +\infty[\quad \text{car}$$

$$37 > 25$$

$$\text{donc } \sqrt{37} > 5 \quad \checkmark$$

$$\text{donc } (*) \Leftrightarrow e^x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}\right)$$

$$\boxed{y = \left\{ \ln\left(\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}\right) \right\}}$$

Exercice 2

①

Equation caractéristique: $x^2 = x - \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = (1 + \mu n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

avec:

$$\begin{cases} d = u_0 = -1 \\ (d+\mu)\left(\frac{1}{2}\right) = u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} d = -1 \\ \mu - 1 = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} d = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(2.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

• $n=0$: $S_0 = \sum_{k=0}^0 u_k = u_0 = -1$
 et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - 3 = -1$ } $\vee$ récurrence initialisée

• $n \geq 0$ Supposons que $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ à un certain rang n .

Montrons que $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \stackrel{(\text{H.R.})}{=} 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$$

$$\stackrel{(1)}{=} 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2(2n+3) - 2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}} \quad \checkmark$$

récurrence achevée $\checkmark$