

DS 3 – Mathématiques

Mercredi 12 novembre 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). :

1. (a) Écrire une fonction `Somme_1(n)` d'argument un entier n et qui renvoie la valeur de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n+5} k (-\sqrt{2})^{n-k}$$

- (b) On souhaite calculer la somme pour $n = 5$. Que doit-on écrire dans la console ?

2. (a) Écrire une fonction `Somme_2(n)` d'argument un entier n et qui renvoie la valeur de la somme S_n où :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^3$$

- (b) Écrire une fonction `test(n)` d'argument un entier naturel n , et qui teste la formule $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, c'est-à-dire qui renvoie :

- True si S_n est égale à $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
- False sinon

(on pourra utiliser la fonction `Somme_2(n)`...)

Exercice 2. : Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans préciser l'ensemble de dérivation) :

1. $f(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$

2. $g(x) = \frac{\sqrt{e^{2x}}}{x^2 - 1}$

3. $h(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$

Exercice 3. : Calculer les sommes suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^{k-1}}{3^{2n+k+1}}$
2. $\forall n \geq 2, R_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n+1}{k} 2^{n-k} (-1)^{k-1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}$

Exercice 4. : Déterminer la valeur de :

1. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
3. $\arctan(-1)$

Exercice 5. :

1. Montrer que pour tout réel θ : $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$
2. Soit $a \in]0, \pi[$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

1. Sur $[0, 2\pi[$: $\tan(x) = 2 \sin(x)$
2. Sur $[0, 2\pi[$: $\sin(x) \cos(x) > \frac{1}{5}$
3. Sur $\mathbb{R}$: $2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 4 = 0$