DM4 - Mathématiques.
Corrigé
24/11/2025

Exercice 1

$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

donc $(E) \Leftrightarrow 1 - \cos^2(x) + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x > 2$

$\Leftrightarrow -\cos^2(x) + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x + 1 < 0.$

On pose $X = \cos x \in [-1, 1]$

donc $(E) \Leftrightarrow X^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} X + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} X^2 - 3X + \sqrt{2} < 0$

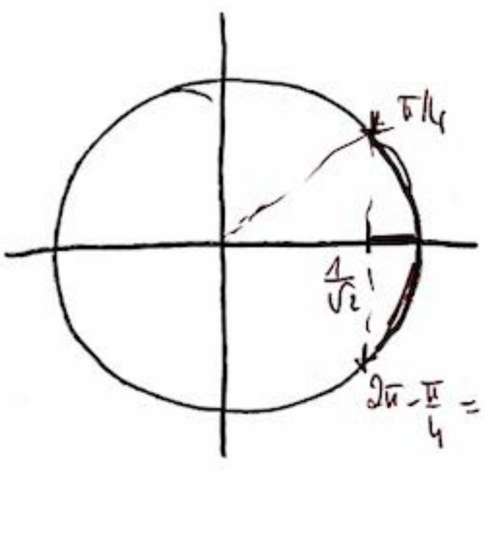
$\Delta = 9 - 2 \times 4 = 1 > 0$ donc le trinôme possède deux racines :

$\frac{3-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ et $\frac{3+1}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \notin [-1, 1]$

donc

X	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		1	$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2}X^2 - 3X + \sqrt{2}$		$+$		$+$	0	$-$		0	$+$	

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < X < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x \leq 1$



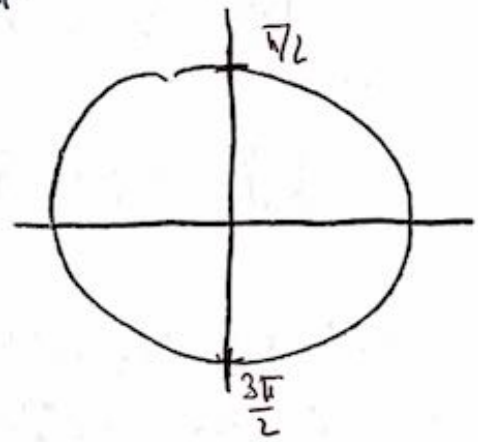
$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

$$\boxed{S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[}$$

Exercice 2

Ensemble de résolution.

- $0 \leq x \leq \pi \iff 0 \leq 2x \leq 2\pi$



$\tan(2x)$ bien définie

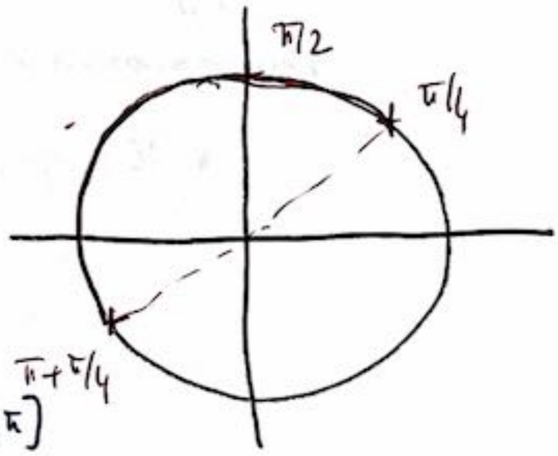
ssi $2x \neq \frac{\pi}{2}$ et $2x \neq \frac{3\pi}{2}$

ssi $x \neq \frac{\pi}{4}$ et $x \neq \frac{3\pi}{4}$.

- $0 \leq x \leq \pi \iff \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{4}$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ bien défini ssi $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$

ssi $x \neq \underbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}_{= \frac{\pi}{4}}$.



Conclusion :

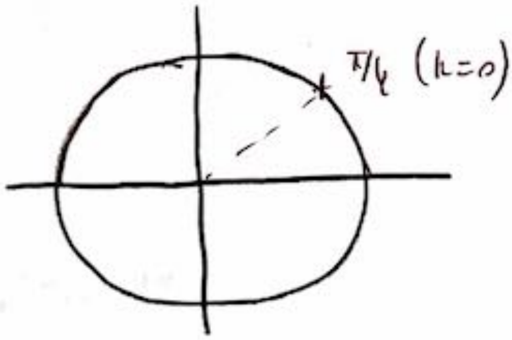
on résout sur

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \tan(2x) \iff 2x = \frac{\pi}{4} + x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

dans $[0, \pi]$:



or $\frac{\pi}{4}$ n'est pas dans l'ensemble de résolution

donc $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 3

- $f(x)$ bien défini ssi $x>0$ et $\underbrace{(\ln(x))^2-\ln(x)+2\geq 0}_{(*)}$.

on pose $X=\ln(x)\in\mathbb{R}$.

donc $(*) \Leftrightarrow X^2-X+2\geq 0$

$\Delta = 1-8<0$

donc $\forall X\in\mathbb{R},\ X^2-X+2>0$

$\forall x>0,\ (\ln x)^2-\ln x+2>0$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]0,+\infty[}$

- $g(x)$ bien défini ssi $\underbrace{e^x+e^{-x}-2\neq 0}_{(*)}$

$(*) \Leftrightarrow (e^x)^2+1-2e^x \neq 0$

(on pose $X=e^x$?)

$\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (e^x-1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 0$

donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*}$