

Exercice 1

①

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{\sqrt{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

en -2 (x > -2): on pose $h = x - (-2) = x + 2 \xrightarrow[x > -2]{x \rightarrow -2} 0, h > 0$.

$$f(x) = \frac{(h-2)^2 - 2(h-2) - 8}{\sqrt{h}} = \frac{h^2 - 4h + 4 - 2h + 4 - 8}{\sqrt{h}} = \frac{h^2 - 6h}{\sqrt{h}}$$

$$= \frac{h(h-6)}{\sqrt{h}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{h}} = \sqrt{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = 0$

②

$$g(x) = \frac{e^{x^3} \left(\frac{e^x}{e^{x^3}} + \frac{x}{e^{x^3}} + 1 \right)}{x^3 \left(1 + \frac{5}{x} \right)}$$

$\bullet X = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{e^x}{x^3} = \frac{e^X}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$ par C.C

$\bullet \frac{e^x}{e^{x^3}} = e^{(x-x^3)}$, avec $x-x^3 = x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^3}} = 0$.

• $\frac{x}{e^{x^3}}$: on pose $Y = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{x}{e^{x^3}} = \frac{(x^3)^{1/3}}{e^Y} = \frac{Y^{1/3}}{e^Y} \xrightarrow{Y \rightarrow +\infty} 0$ par C.C

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^3}} = 0$.

Cl: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$

en $-\infty$:

$$g(x) = \frac{e^x + (x^2) + e^{x^3}}{(x^3 + 5)} = \frac{e^x + e^{x^3}}{x^3 + 5} + \frac{(x^2)}{(x^3 + 5)}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{x^3}}{x^3 + 5} = 0$

• $\frac{x^2}{x^3 + 5} = \frac{x^2}{x^3 \left(1 + \frac{5}{x^3}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{5}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0}$

③. en 0 ($x > 0$):

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$
 $x > 0$

$$\sqrt{x} e^{\frac{1}{x}} = \sqrt{x} e^X = \sqrt{\frac{1}{X}} e^X = \frac{e^X}{\sqrt{X}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \text{ par C.C}$$

donc $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty}$

Exercice 2.

$f(x)$ bien définiessi $x > 0$ et $\ln(x) > 0$ et $x \neq 0$

donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$

f dérivable sur $]1, +\infty[$: Δ : racine ("intérieur" non nul)

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}} \times x - \sqrt{\ln(x)} \times 1 \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}} \times x - \sqrt{\ln(x)} \right)$$

$$= \frac{1 - 2\ln(x)}{2x^2\sqrt{\ln(x)}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{1/2}$

$\left(e^{1/2} > 1 \Leftrightarrow e^{1/2} > e^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > 0 \right) \quad \text{RA1}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \quad \text{car } 2x^2\sqrt{\ln(x)} > 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(x) < 1$

$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < e^{1/2}$

x	1	$e^{1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$	?	0	-
f		$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	

Diagram showing the function f starting at 0 for $x=1$, increasing to a maximum at $x=e^{1/2}$ with value $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, and then decreasing towards 0 as $x \rightarrow +\infty$.

$$f(e^{1/2}) = \frac{\sqrt{\ln(e^{1/2})}}{e^{1/2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

- en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}$$

par C.C, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- Éléments remarquables:

• $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en $(e^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$

• en $+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y=0$.

• en $(1,0)$: ??

