

DS 4 – Mathématiques

Mercredi 10 décembre 2025

Durée de l'épreuve : 3 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de quatre exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). :

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{n} u_n - e$$

- (a) Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie la valeur du terme de rang n de la suite.

- (b) On note la somme : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, pour tout entier naturel n non nul.

i. Écrire une fonction `somme(n)` qui renvoie la valeur de S_n , **en utilisant la fonction `suite`**

ii. Écrire une fonction `somme_mieux(n)` qui renvoie la valeur de S_n , **sans utiliser la fonction `suite`**

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^2}$$

- (a) Écrire une fonction `terme(n)` qui renvoie la valeur du terme u_n . (pour tout entier $n \geq 2$)

- (b) On tape `terme(1)` dans la console. Que renvoie l'ordinateur ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. :

1. Donner la forme exponentielle de : $\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

2. Soit $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- (a) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \cos(\theta)$

- (b) Déterminer le module et un argument de $\tan(\theta) + i$.

- (c) En déduire la forme trigonométrique du complexe : $z = \frac{\tan(\theta) - i}{\tan(\theta) + i}$

Exercice 3. : On se donne $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Étudier le signe de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = \cos(\theta)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 2 \cos(\theta) z^2 + 1 = 0$

Exercice 4. : Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + e^{-x} - xe^x}{(x + e^x)^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + e^{-x} - xe^x}{(x + e^x)^2}$

Exercice 5. Étude complète de :

$$f(x) = \sqrt{x+4} e^{1/x}$$

on prendra le soin de montrer que $\sqrt{2} e^{-1/2} < 2\sqrt{2} e^{1/4}$