DS4 - Mathématiques

10/12/2025

Corrigé

Exercice 2.

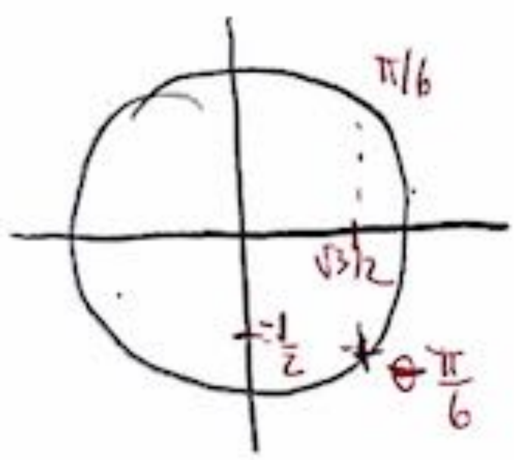
1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

. $|z| = \dfrac{1}{2}\,|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|$ avec $|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

donc $|z| = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$.

donc $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}\right)$

on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$



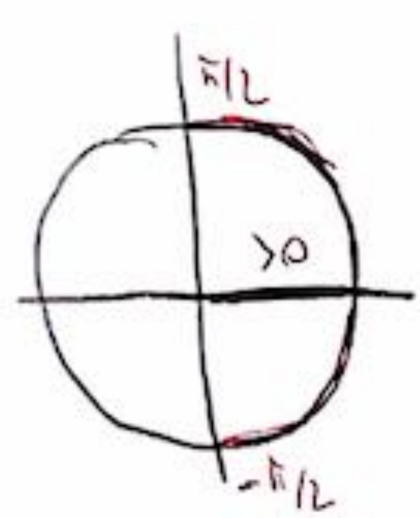
on prend $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

donc $\boxed{z = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$

2. (a) $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ donc $\dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)} = \cos^2(\theta)$

$$\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}} = \sqrt{\cos^2(\theta)} = |\cos(\theta)|$$

or $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\theta) > 0$



donc $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \cos(\theta)}$

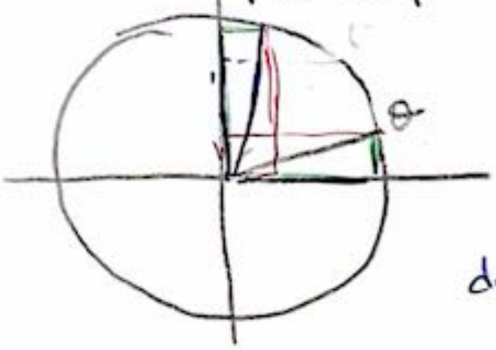
(b) $\boxed{|\tan(\theta)+i| = \sqrt{\tan^2(\theta)+1} = \frac{1}{\cos(\theta)}}$ (cf (a))

donc $\tan(\theta)+i = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\tan(\theta)\cos(\theta) + i\cos(\theta)\right)$

$$= \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\sin(\theta) + i\cos(\theta)\right)$$

donc on cherche $\varphi \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} \cos(\varphi) = \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) = \cos(\theta) \end{cases}$

$(\pi/2-\theta) = \varphi$



$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

donc $\boxed{\text{un argument de } \tan(\theta)+i \text{ est } \frac{\pi}{2}-\theta}$

(c) On note $z_1 = \tan(\theta)+i$.

On remarque donc $z = \frac{\overline{z_1}}{z_1}$

or d'après b), $z_1 = \frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ donc $\overline{z_1} = \frac{1}{\cos(\theta)} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

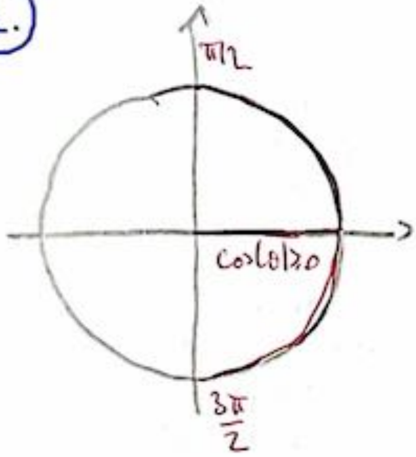
donc $z = \dfrac{\frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\frac{1}{\cos(\theta)} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} = e^{i0}$

donc $\boxed{z = \cos(0) + i\sin(0)}$

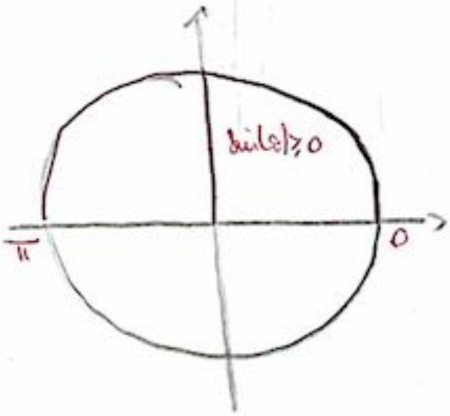
Exercice 3.

$\theta \in [0, 2\pi[$

1.



θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$



θ	0		π		2π
$\sin(\theta)$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$

2. D'après 1.

si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

$\cos(\theta) \geq 0$

donc $\boxed{S = \{ \sqrt{\cos(\theta)}, -\sqrt{\cos(\theta)} \}}$.

$\left(S = \{0\} \text{ si } \theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \right)$

si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$\cos(\theta) < 0$

donc $\boxed{S = \{ -i\sqrt{-\cos(\theta)}, i\sqrt{-\cos(\theta)} \}}$

(3.) On pose $Z = z^2 \in \mathbb{C}$

donc $(*) \iff Z^2 - 2\cos(\theta) Z + 1 = 0$

$$\Delta = (2\cos(\theta))^2 - 4 = 4(\cos(\theta)^2 - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$$

D'après 1. :

• si $\theta = 0$: $\Delta = 0$ et $(*) \iff Z^2 - 2Z + 1 = 0$

$\iff (Z-1)^2 = 0$

$\iff Z = 1 \ (\in \mathbb{C})$

$\iff z^2 = 1$

donc $\boxed{S = \{-1, 1\}}$

• si $\theta = \pi$: $\Delta = 0$ et $(*) \iff Z^2 + 2Z + 1 = 0$

$\iff (Z+1)^2 = 0$

$\iff Z = -1 \ (\in \mathbb{C})$

$\iff z^2 = -1$

donc $\boxed{S = \{-i, i\}}$

* si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$: $\Delta < 0$ et $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4\sin^2(\theta)} = 2|\sin(\theta)|$

donc $(*) \iff \left| \begin{array}{l} Z = \dfrac{2\cos(\theta) + i2|\sin(\theta)|}{2} = \cos(\theta) + i|\sin(\theta)| \\ \text{ou } Z = \dfrac{2\cos\theta - i2|\sin(\theta)|}{2} = \cos(\theta) - i|\sin(\theta)| \end{array} \right.$

donc d'après 1.

si $\theta \in]0, \pi[$: $|\sin\theta| = \sin\theta$

donc $\boxed{S = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}}$

si $\theta \in]\pi, 2\pi[$ $|\sin(\theta)| = -\sin\theta$

donc de même :

$\boxed{S = \{e^{-i\theta}, e^{i\theta}\}}$

Exercice 4

1. en 0 :

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)\right]\left[\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{8}}$

2. en $+\infty$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(x+e^x)^2} + \frac{e^x(2-x)}{(x+e^x)^2}$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{(x+e^x)^2} = 0$ et : $\frac{e^x(2-x)}{(x+e^x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(e^x)^2\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^2}$

$$= \frac{2-x}{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^2}$$

- par C.C, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
- $\frac{2-x}{e^x} = \frac{2}{e^x} - \frac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par C.C (la même)

Conclusion: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

(3.) en $-\infty$

$$f(x) = 2\frac{e^x}{(x+e^x)^2} + \frac{e^{-x}}{(x+e^x)^2} - \frac{xe^x}{(x+e^x)^2}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\frac{e^x}{(x+e^x)^2} = 0$

- $\frac{e^{-x}}{(x+e^x)^2} = \frac{e^{-x}}{x^2\left(1+\frac{e^x}{x}\right)^2}$ or $\frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{1}{x^2e^{x}}$

par C.C : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x} = 0$ $\left(\text{"}\frac{1}{0}\text{"}\right)$

or $x^2e^x > 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(x+e^x)^2} = +\infty$

- Par C.C, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{(x+e^x)^2} = 0$

Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

Exercice 5.

- $f(x)$ bien définie ssi $x+4 \geq 0$ et $x \neq 0$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f = [-4, 0[\cup]0, +\infty[}$

- f dérivable sur $]-4, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}e^{\frac{1}{x}} + \sqrt{x+4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{\sqrt{x+4}}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x^2 - 2(x+4)}{2x^2\sqrt{x+4}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{x+4}}\left(x^2 - 2x - 8\right)$$

x	-4		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$	?	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$\searrow$ 0	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}\,e^{1/4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-2) = \sqrt{2}\; e^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$f(4) = \sqrt{8}\, e^{1/4} = 2\sqrt{2}\; e^{1/4}$$

$$\sqrt{2}\, e^{-1/2} < 2\sqrt{2}\, e^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-1/2} < 2\, e^{1/4} \quad (\sqrt{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 2\, e^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \quad (e^{1/2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 2\, e^{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < e^{3/4}$$

or $e^{3/4} > e^{0} > 1 > \frac{1}{2}$ donc VRAI.

- en 0

si $x>0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x=0$

si $x<0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$

- en $+\infty$:
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  - $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+4}}{x} e^{1/x}$, avec $\frac{\sqrt{x+4}}{x} = \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x}\left(1+\frac{4}{x}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{4}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

en $+\infty$: $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une branche parabolique horizontale}}$