Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2025/2026
Mme MOREL

DS 5 – Mathématiques

Mercredi 21 janvier 2026

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). **:**

1. On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2}$$

   (a) i. Écrire une fonction `somme(n)` qui renvoie la valeur du terme de rang n de la suite.
       ii. Écrire une fonction `somme_mieux(n)` qui renvoie la valeur du terme S_n
       sans utiliser la commande `**`
   (b) i. Écrire une fonction `seuil(M)` qui pour tout réel M, renvoie le premier entier n tel que $S_n \geqslant M$
       en utilisant la fonction `somme` **ou** `somme_mieux`
       ii. Donner la valeur de S_1 et montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$.
       iii. Écrire alors une fonction `seuil_mieux(n)` qui , pour tout réel M, renvoie le premier entier n tel que $S_n \geqslant M$
       sans utiliser la fonction `somme` **ou** `somme_mieux`

2. On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à temps d'obtenir Pile.
   (a) Comment simuler un lancer de pièce ?
   On pourra supposer que 0 *représente Face et* 1 *représente Pile*
   (b) Écrire une fonction `jeu()` qui renvoie le nombre d'essais jusqu'à temps d'obtenir Pile.

Exercice 2. : Résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & & & + & z & = 4 \\ 2x & - & y & + & 4z & = 9 \\ -x & + & y & + & 2z & = -6 \end{array} \right.$$

Exercice 3. : On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\; S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^3}\right)$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ \sin(x) \leqslant x$
2. En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 4. : Calculer les limites des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$ (si elles existent) :

1. $u_n = \left(1 - e^{-n}\right)^n$
2. $v_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
3. $w_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\,\sqrt{2^n+1}}{4^n}$

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$, pour tout réel x.
Et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout x réel.
2. (a) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   - i. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$
   - ii. Étudier la monotonie de (u_n)
   - iii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

   (b) Dans cette question, on prend $u_0 = 1$.
   - i. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$
   - ii. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   - iii. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 6. Établir le tableau de variations de la fonction f d'expression :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$