

Exercice 2

$$(Y) \quad \begin{cases} x + z = 4 \\ 2x - y + 4z = 9 \\ -x + y + 2z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} \textcircled{1} x + z = 4 \\ -y + 2z = 1 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

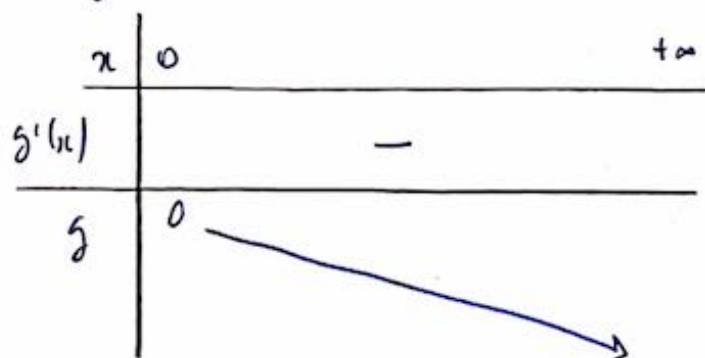
$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} \textcircled{1} x + z = 4 \\ \textcircled{-1} y + 2z = 1 \\ \textcircled{5} z = -1 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} x = 4 - z = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5} \\ y = -1 + 2z = -1 - \frac{2}{5} = -\frac{7}{5} \\ z = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right) \right\}$$

Exercice 3.

- ①. $\forall x \geq 0$, on pose $g(x) = \sin(x) \cdot x$
 g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$



donc $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$

dit: $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$

- ②. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k}{n^3} \geq 0$ donc $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$.

donc en sommant: $S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3}$

avec $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)}{2}$

donc $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} \sim \frac{n^2}{2n^3}$ avec $\frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} = 0$

De plus, $0 \leq \frac{k}{n^3} \leq 1$ donc $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \geq 0$

donc $S_n \geq 0$

Conclusion: par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$

Exercice 4

① $u_n = e^{n \ln(1+e^{-n})}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \text{ donc } \ln(1+e^{-n}) \sim e^{-n}$$

$$\text{donc } n \ln(1+e^{-n}) \sim n e^{-n}$$

$$\text{or } n e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1+e^{-n}) = 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

② $v_n = n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ $\left(\begin{array}{l} \frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n} \text{ donc } \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \\ \text{donc } 0 \times \infty \end{array} \right)$

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$$

$$\text{donc } n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim n^2 \times \left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{avec } n^2 \left(-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n^2}{n+1} \sim -\frac{n^2}{n}$$

$$\text{donc } n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim -n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\infty$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}$$

③ $w_n = \frac{\ln(n^2+3) \sqrt{2^{n+1}}}{4^n}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\sqrt{2^{n+1}} = \sqrt{2^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = \sqrt{2^n} \sqrt{1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$\text{donc } w_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^n}} \times \frac{\ln(n^2+3) \sqrt{2^n}}{2^n \times 2^n} = \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{2^n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \times \frac{\ln(n^2+3)}{2^n \sqrt{2^n}}$$

$$\begin{aligned} \ln(n^2+3) &= \ln\left(n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\right) = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) \\ &= 2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\ln(n^2+3)}{2^n \sqrt{2^n}} = \frac{2\ln(n)}{2^n \sqrt{2^n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{2^n \sqrt{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{par C.C, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{2^n} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{\ln(n)}{2^n} \times \frac{1}{\sqrt{2^n}} = 0$$

Conclusion $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

Exercice 5

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-	+

(2) (a)

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

$n=0$: $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$ ✓

$n \geq 0$: Supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ a un certain rang n .

alors $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{16}$ car $(x) \mapsto x^2$ li sur $[0, \frac{1}{4}]$ et $0, u_n, \frac{1}{4} \geq 0$

donc $\frac{3}{16} \leq f(u_n) \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{16}$ avec $\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
 récurrence achevée.

ii. $\forall x \in [0, \frac{1}{4}], f(x) - x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \frac{1}{4}]$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) est croissante

iii. (u_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{4}$) donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$

et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ donc $0 \leq l \leq \frac{1}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$ donc à la limite $l = l^2 + \frac{3}{16}$

$\Leftrightarrow f(l) - l = 0$

$\Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$

et $l \in [0, \frac{1}{4}]$ donc $l = \frac{1}{4}$.

(d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$)

(5)

i. Par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 1$.

$n=0$: $u_0 = 1 \checkmark$

$n \geq 1$. Supposons que $u_n \geq 1$ à un certain rang n

alors $u_{n+1}^2 \geq 1$ donc $f(u_n) \geq 1 + \frac{3}{16} \geq 1$

$u_{n+1} \geq 1$: récurrence achevée.

ii. $\forall x \geq \frac{3}{4}, f(x) - x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1 \geq \frac{3}{4}$

donc $f(u_n) - u_n \geq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) est croissante

iii. Par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 + \frac{3}{16} = u_{n+1}$ donc à la limite, $l = l^2 + \frac{3}{16}$

$$\Leftrightarrow l^2 - l = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{4} \text{ ou } l = \frac{3}{4}$$

or $l \geq 1$ donc absurde

Conclusion: (u_n) ne converge pas.

or (u_n) est croissante donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$

Exercice 6

$f(x)$ bien défini si $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$ et $x \neq 1$

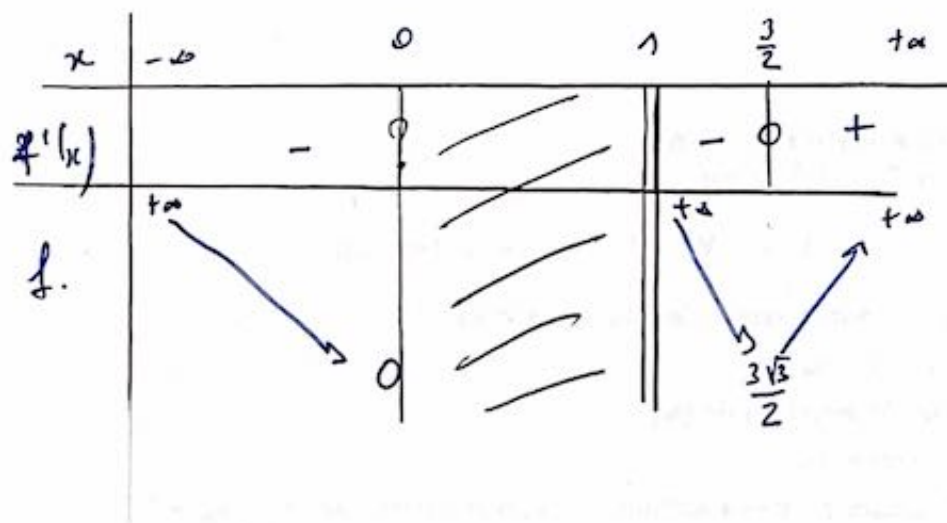
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^3		- 0 +		+
$x-1$		-	- 0 +	
$\frac{x^3}{x-1}$		+	0 -	+

Conclusion: $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[}$

f dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \times \frac{3x^2(x-1) - x^3 \times 1}{(x-1)^2}$$

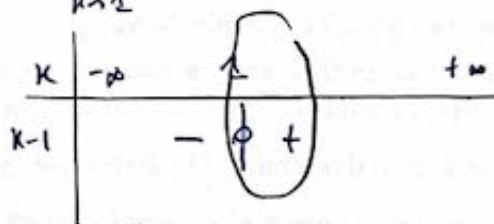
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} (x-1)^2} (2x^3 - 3x^2) = \frac{x^2}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} (x-1)^2} (2x-3)$$



$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{3^3}{2^3}}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}} = \sqrt{\frac{3^3}{2^3 \times \frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

en 1 ($x > 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1 > 0$$



$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3}{x-1} = +\infty \quad \text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

f admet une asymptote verticale $x=1$

en ∞ :

$$\frac{x^3}{x-1} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{|x|}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \quad (1 - \frac{1}{x} > 0) \\ \text{donc en } +\infty: \quad \frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \\ \text{en } -\infty: \quad \frac{f(x)}{x} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1 \end{aligned} \right)$$

NON DEMANDÉ!