

Exercice 2

①. $f(x)$ bien défini si $e - e^{-1/x} > 0$ et $x \neq 0$.

$$e - e^{-1/x} > 0 \Leftrightarrow e > e^{-1/x} \Leftrightarrow 1 > -\frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		-	0	+
x		-	-	0
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	+

Conclusion :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

f dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{e - e^{-1/x}} \times \left(-\frac{1}{x^2} e^{-1/x} \right) < 0$$

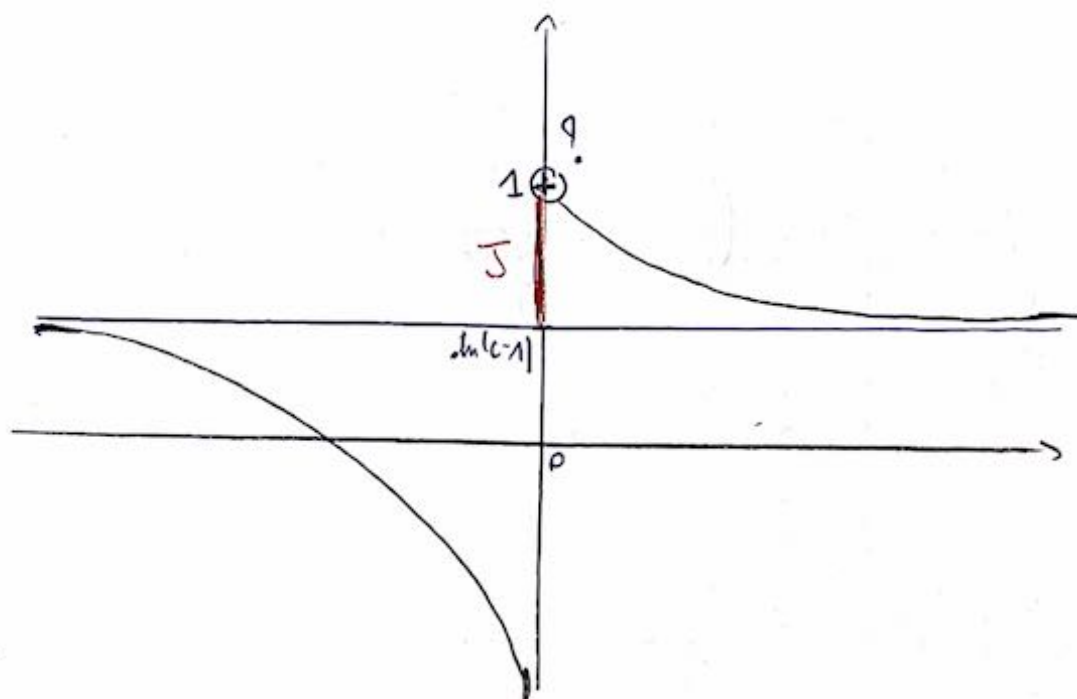
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
f	$\ln(e-1)$			$\ln(e-1)$

en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(e-1)$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ln(e-1)$ en $+\infty$

en $0(x > 0)$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln(e) = 1$

en $1(x < 1)$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x=1$



- ②
- f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc f est injective sur $]0, +\infty[$.
 - $f(]0, +\infty[) =]\ln(e-1), 1[$ donc f est surjective de $]0, +\infty[$ dans $]\ln(e-1), 1[$

Conclusion: f est bijective de $]0, +\infty[$ dans $J =]\ln(e-1), 1[$

③ $f^{-1}:]\ln(e-1), 1[\rightarrow]0, +\infty[$

$\forall y \in]\ln(e-1), 1[$, on résout $f(x) = y$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e - e^{-1/x}) = y \Leftrightarrow e - e^{-1/x} = e^y \text{ car } f \text{ est injective sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{-1/x} = e - e^y$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} = \ln(e - e^y) \text{ car } \ln \text{ injective sur }]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\ln(e - e^y) \text{ et: } \ln(e-1) < y < 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\ln(e - e^y)}$$

$$(\text{car } e - e^y \neq 1) \rightarrow \boxed{0 < e - e^y < 1} \text{ ou } \boxed{e - e^y < 1}$$

Conclusion:

$$\forall t \in]\ln(e-1), 1[, f^{-1}(t) = -\frac{1}{\ln(e-e^t)}$$

Exercice 1

$$\textcircled{1} \quad (Y) \Leftrightarrow \begin{cases} l_2 \in l_2 - 2l_1 \\ l_3 = l_3 + l_1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} x + 2z = 4 \\ my = -m \\ -my + (m^2 - 3m)z = 2m \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_3 = l_3 + l_2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} x + 2z = 4 \\ \textcircled{m} y = -m \\ (m^2 - 3m)z = m. \end{array} \right.$$

• si $m=0$

$$(Y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} x + 2z = 4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

donc $\text{rg}(Y) = 1$ et (Y) a une infinité de solutions

• si $m=3$:

$$(Y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} x + 2z = 4 \\ \textcircled{3} y = -3 \\ 0 = 3 \end{array} \right.$$

(Y) est incompatible

• si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$: $\text{rg}(Y) = 3$ donc (Y) a une unique solution
(système de Cramer)

②.

for $m=0$:

$$(J) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=4 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$J = \{ (4-2z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2 \}$$

for $m=1$:

$$(J) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=4 \\ y=-1 \\ -2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2z=4-2\left(-\frac{1}{2}\right)=5 \\ y=-1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$J = \left\{ \left(5, -1, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$