Calcul matriciel

I. Calcul matriciel.

Exercice 1 Expliciter la matrice A dans les cas suivants:

(a) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = i - j + 1$. $\quad$ (b) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \max(i, j)$

Exercice 2 Soient les matrices $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{5,3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises et le format des résultats:

$$B\,A \qquad A\,(B+C) \qquad A\,B\,D \qquad A\,C + B\,D \qquad A\,B\,A\,B\,D\,.$$

Exercice 3 On donne les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'ils existent, effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux.
On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.

Exercice 4 Lorsqu'ils sont définis, calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2\,AB + B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$.

II. Équations matricielles.

Exercice 6 :

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Résoudre l'équation $A - 3\,X = 2\,B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

Exercice 9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A\,B = 0$
2. Déterminer toutes les matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A\,C = C\,A = 0$

Exercice 10 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = B$ d'inconnue X.

III. Matrices inversibles.

Exercice 11 On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^T\,A$ et B^2. Qu'en conclure?

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, B^2. En déduire que A et B sont inversibles et donner leur inverse.
2. Calculer AB et BA.
3. Montrer que AB est inversible et déterminer son inverse.
4. Est-ce-que $(AB)^2 = A^2\,B^2$?

Exercice 13 Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\left(2\,I_n + B^{-1}\right)\,B + A\,\left(B - A^{-1} + 2\,A^{-1}\,B\right) - AB$
2. $A\,\left(7\,I_n + A^{-1}\right) - B\,\left(5B^{-1}\,A + B^{-1} + A\right) + A\,(B - 2\,I_n)$

Exercice 14 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout réel θ, $R(\theta)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 15 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

1. A quelle condition la matrice A est-elle inversible? Déterminer son inverse dans ce cas.
2. Donner, lorsque A est inversible, une relation entre A^T et A^{-1}.

Exercice 16 Discuter selon le paramètre réel m l'inversibilité des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 3 & -m \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$. en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 18 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et $(A - 4I)(A^2 + 2A - I)$.
   En déduire trois réels a, b, c tels que: $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de I et des puissances de A.
   Expliciter A^{-1}.

Exercice 19 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A , A^2 et I_3.

Exercice 20 Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $C^3 - 3\,C^2 + 2\,C = 0$. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 21 : Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.