

Exercice 1

$$(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - 2z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ (3-\lambda)y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - 2z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ (-\lambda^2 + 3\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$$

* si $\lambda = 1$

$$(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \end{cases}$$

$\dim(Y) = 1$ et $Y = \{(x, z, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$

* si $\lambda = 2$

$$(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + 2y = -2z + 4z = 2z \\ y = 2z \end{cases}$$

$\dim(Y) = 2$ et $Y = \{(2z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

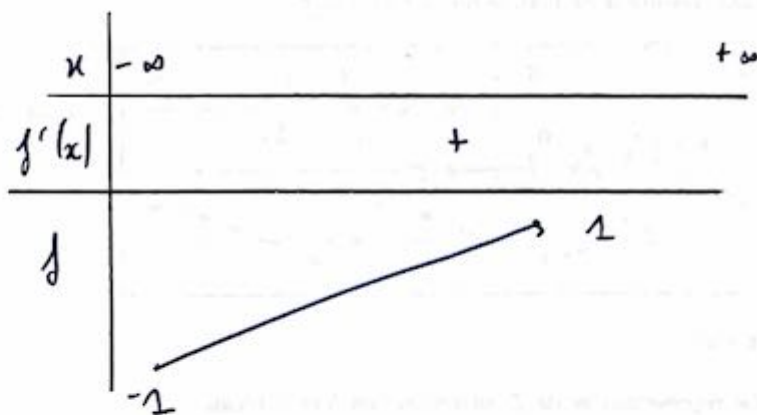
* si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$:

$\dim(Y) = 3$ et $Y = \{(0, 0, 0)\}$

Exercice 2

①. f dérivable sur $\mathbb{R}$ (petite?)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$



en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{e^{2x}(1+e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

②. f $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est injective.

$f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ donc f surjective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

Conclusion: f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$

③. $\forall y \in]-1, 1[$, on résout $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Cette équation a une unique solution car f bijective et $x = f^{-1}(y)$.

$$\forall y \in]-1, 1[, f(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = y + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \quad \text{car } y \neq 1$$

y	-1	1
$y+1$	$\emptyset$	$+$
$1-y$	$+$	$\emptyset$
$\frac{y+1}{1-y}$	$\emptyset$	$+$

donc $\frac{y+1}{1-y} > 0, \forall y \in]-1, 1[$

donc $f(x) = y \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$ car $\ln$ injective sur $]0, +\infty[$
 and $e^{2x} > 0$
 $\frac{1+y}{1-y} > 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

Conclusion:

$$f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$