

Matrices et probabilités

Exercice 1 :

1. Question préliminaire

Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Déterminer les puissances de M : cf exercice 7, Fiche 29.

2. Étude d'un déplacement

On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant :

- Si la particule se trouve en B , elle y reste ;
- Si la particule se trouve en A , elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable ;
- Si la particule se trouve en C , à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A .

À la première seconde, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets.

Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "à la n -ième seconde, la particule se trouve en A " (resp. B et C), et on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n .

Que valent a_1, b_1 et c_1 ?

3. Récurrence

Pour tout entier naturel n non nul, donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n .

4. Forme matricielle

On note, pour $n \geq 1$, X_n la matrice :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\forall n \geq 1, X_{n+1} = M X_n$. En déduire X_n en fonction de M, n et X_1 .

5. Calcul des probabilités

En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n pour tout $n \geq 1$

6. Convergence

Étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

Exercice 2 :

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.

4. (a) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}

- (b) On note la matrice $D = P^{-1}MP$. Déterminer les coefficients de D , et en déduire D^n , pour tout entier n .
 (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

5. Donner une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) . Interpréter le résultat.