DS6 - Mathématiques.
18/02/2026
CORRIGÉ

Exercice 2

1.

- $f(x)$ bien défini ssi $1-x>0$ et $x>0$ et $\ln(x)\neq 0$
 ssi $x<1$ et $x>0$ et $x\neq 1$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]0,1[}$

- f dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{(\ln(x))^2}\left(\frac{-1}{1-x}\ln(x) - \ln(1-x)\times\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-1}{(\ln(x))^2} \times \frac{x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)}$$

$\forall x \in]0,1[$, $(\ln(x))^2>0$ et $x>0$ et $1-x>0$

$\forall t \in]0,1[$:

t	0		1
t		+	
$\ln(t)$	||	−	||
$t\ln(t)$	||	−	||

or $\forall x \in]0,1[$, $\left.\begin{array}{l} 0<x<1 \\ -1<-x<0 \\ 0<1-x<1 \end{array}\right\}$ donc $x\ln(x)<0$ et $(1-x)\ln(1-x)<0$

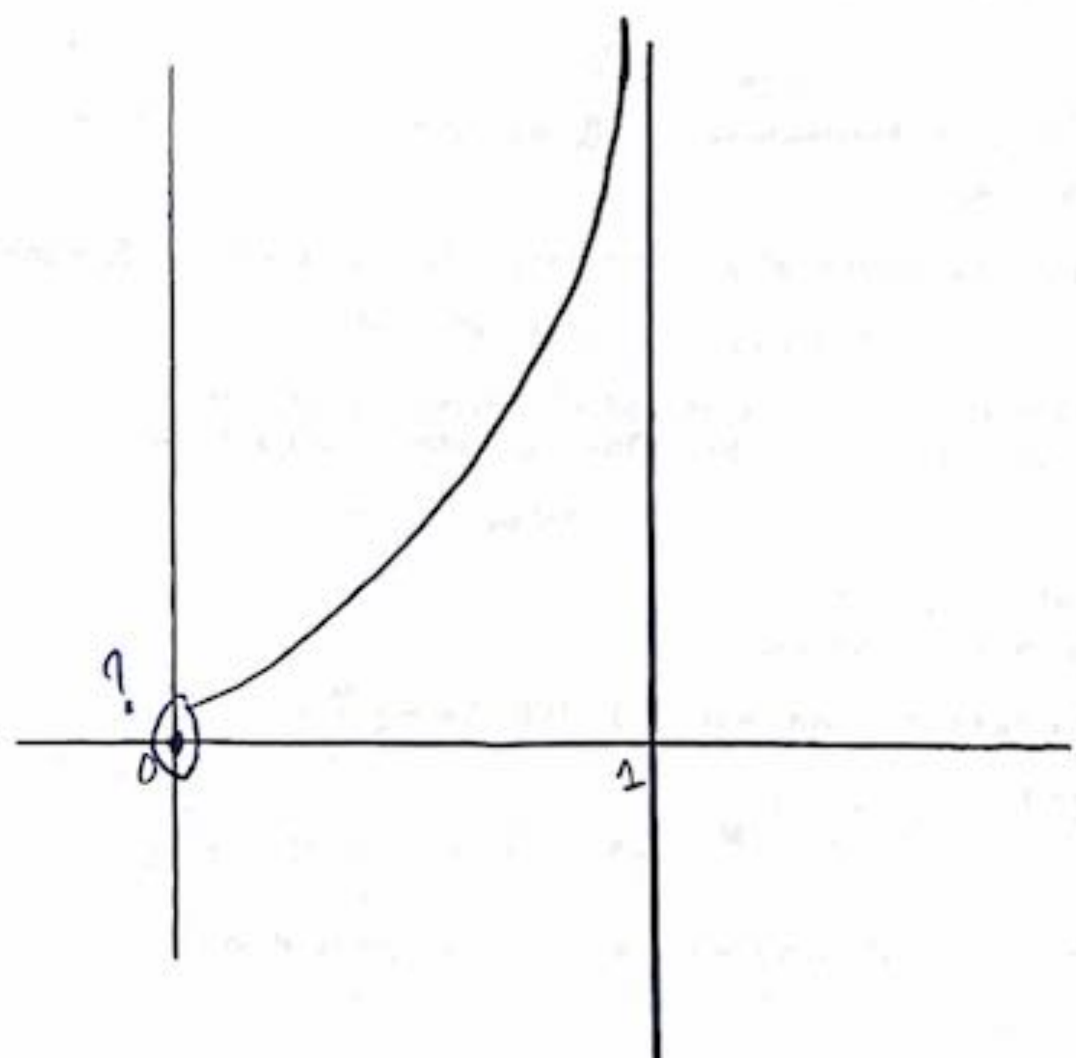
donc $f'(x)>0$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

. en 1 $(x<1)$: $\ln(x) < 0$ et $\ln(1-x) < 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x = 1$



(2.) f est strictement croissante sur $]0,1[$ donc injective.

On lit : $f(]0,1[) =]0,+\infty[$ donc f est surjective de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est bijective de }]0,1[\text{ dans }]0,+\infty[}$

Exercice 3

$\forall y \in]1,+\infty[$, on résout l'équation $f(x)=y$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

$f(x)=y \iff \sqrt{e^{2x}+1}=y$

$\iff e^{2x}+1=y^2$ $\quad$ $(x\mapsto x^2)$ injective sur $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{e^{2x}+1}\geq 0$ $\quad y\geq 0$ (car $y>1$)

$\iff e^{2x}=y^2-1$

$\iff 2x=\ln(y^2-1)$ $\quad$ ln injective sur $]0,+\infty[$ et $e^{2x}+1>0$ $\quad y>1$ donc $y^2>1$ donc $y^2-1>0$ ✓

$\iff x=\frac{1}{2}\ln(y^2-1)$

Conclusion: $\forall y>1$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution $x=\frac{1}{2}\ln(y^2-1)$

donc $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]1,+\infty[}$

et
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} :]1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{2}\ln(t^2-1) \end{aligned}}$$

Exercice 4

1. Soient les événements:

B_k = "B gagne la partie k" et A_k = "A gagne la partie k"

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, B_k, A_k forment un scc

donc FPT:

$$P(B_{k+1}) = P_{B_k}(B_{k+1})\times P(B_k)+P_{A_k}(B_{k+1})\times P(A_k)$$

$$p_{k+1} = \frac{5}{10}\times p_k + \left(1-\frac{6}{10}\right)(1-p_k)$$

$$= \left(\frac{5}{10}-\frac{4}{10}\right)p_k + \frac{4}{10}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \; p_{k+1} = \frac{1}{10} p_k + \frac{2}{5}}$

On résout : $\forall x \in \mathbb{R}, \; x = \frac{1}{10} x + \frac{2}{5} \iff \left(1 - \frac{1}{10}\right) x = \frac{2}{5}$

$$\iff x = \frac{2}{5} \times \frac{10}{9}$$

$$\iff x = \frac{4}{9}$$

Donc $\left(p_k - \frac{2}{9}\right)_{k \geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de 1er terme $p_1 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$

$$\boxed{p_k = \frac{7}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} + \frac{2}{9}}$$

(2)

(a) On note $B =$ " B gagne toutes les parties "

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $B = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$

FPC : $P(B) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n)$

$P(B) = 1 \times \left(\frac{5}{10}\right)^{n-1}$

donc $\boxed{P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(b) Dans cette question, on cherche $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(c) On note l'évènement

$G_k =$ " B gagne la 1ère partie et la k^e partie et pas d'autres " $\forall k \geq 2$

$$C_k = B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1} \cap B_k \cap \bar{B}_{k+1} \cap \dots \cap \bar{B}_n$$

FPC :

$$P(C_k) = \overbrace{P(B_1)}^{1} \times \overbrace{P_{B_1}(\bar{B}_2)}^{\frac{5}{10}} \times \overbrace{P_{B_1\cap\bar{B}_2}(\bar{B}_3)}^{6/10} \times \dots \times \overbrace{P_{B_1\cap\dots\cap\bar{B}_{k-2}}(\bar{B}_{k-1})}^{6/10} \Big|_{(k-1 \text{ tirages})} \times \overbrace{P_{B_1\cap\dots\cap\bar{B}_{k-1}}(B_k)}^{4/10}$$

$$\times \underbrace{P_{B_1\cap\dots\cap\bar{B}_{k-1}\cap B_k}(\bar{B}_{k+1})}_{5/10} \Big|_{k+1 \text{ tirages}} \times \dots \times \underbrace{P_{B_1\cap\bar{B}_2\cap\dots\cap B_k\cap\bar{B}_{k+1}\cap\dots\cap\bar{B}_{n-1}}(\bar{B}_n)}_{6/10} \Big|_{(n \text{ tirages})}$$

$$= 1 \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \dots \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \dots \times \frac{6}{10}$$

$$= 1 \times \left(\frac{5}{10}\right)^2 \times \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{10}\right)^{n-4} \quad \forall n \geq 4.$$

$$\forall n \geq 4 \quad \boxed{P(C_k) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 \times \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{10}\right)^{n-4} \quad \forall k \in [\![2,n]\!].}$$

On note C = " B gagne deux parties ".

$\forall n \geq 4$: $C = C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \dots \cup C_n$ événements deux à deux incompatibles

$$\text{donc } P(C) = \sum_{k=2}^{n} P(C_k) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{10}\right)^2 \times \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{10}\right)^{k-4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{6}{10}\right)^{-2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{6}{10}\right)^{k} \quad (k' = k-2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{5}} \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{5} + 1\right)$$

$$\boxed{P(C) = \frac{25}{36}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)}$$

avec $P(C_2) = P(B_1 \cap B_2) = 1 \times \frac{5}{10}$ donc $\boxed{P(C_2) = \frac{1}{2}}$ $(n=2)$
$(n=2)$

$(n=3)$ $P(C_2) = P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) = 1 \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10}$ donc $P(C_2) = \frac{1}{4}$ $(n=3)$

$P(C_3) = P(B_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) = 1 \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{10}$ donc $P(C_3) = \frac{1}{5}$