

- Dynamique d'un circuit électrique du 1^{er} ordre : le circuit RC série -

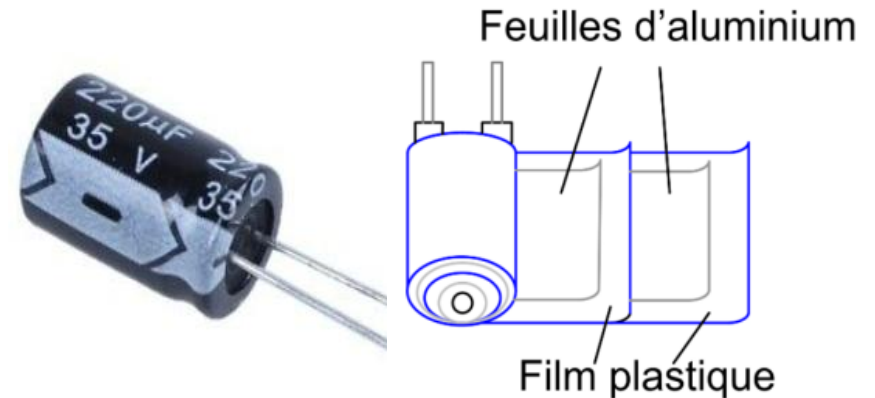
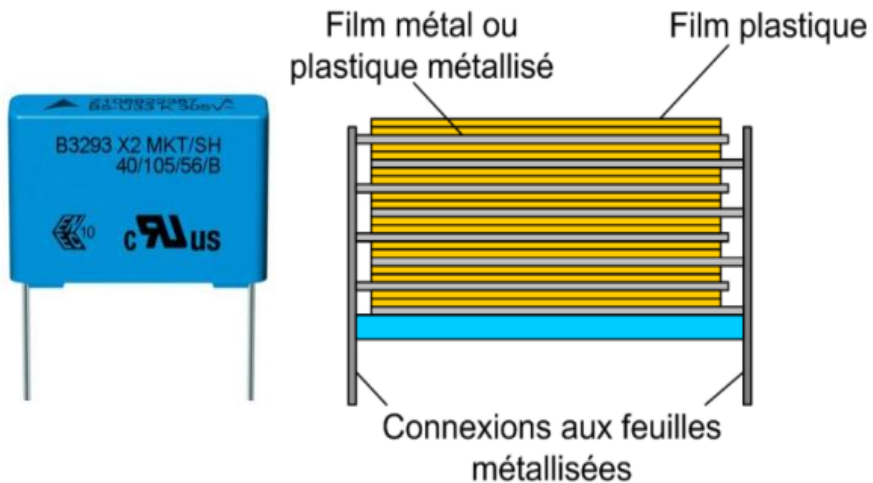
Notions et contenus	Capacités exigibles
- Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. - Relation entre charge et tension électriques, entre intensité du courant électrique et tension électrique ; capacité d'un condensateur. - Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur. - Énergie stockée dans un condensateur.	- Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur plan. - Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit.
- Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.	- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
- Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.	- Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. - Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. - (TP) Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques.
- Stockage et dissipation d'énergie.	- Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série



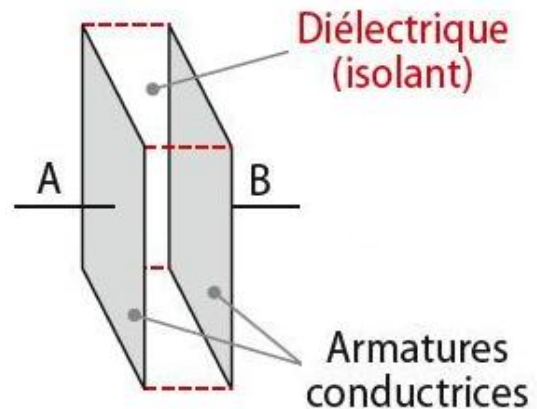
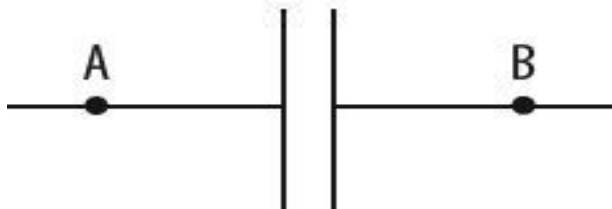
I- Le modèle du condensateur idéal

1) Définition et représentation symbolique

☛ Définition : Un **CONDENSATEUR** est un système constitué de **deux surfaces conductrices** en regard, appelées **armatures**, **séparées par un matériau isolant**, appelé **diélectrique**.



☛ Représentation symbolique :



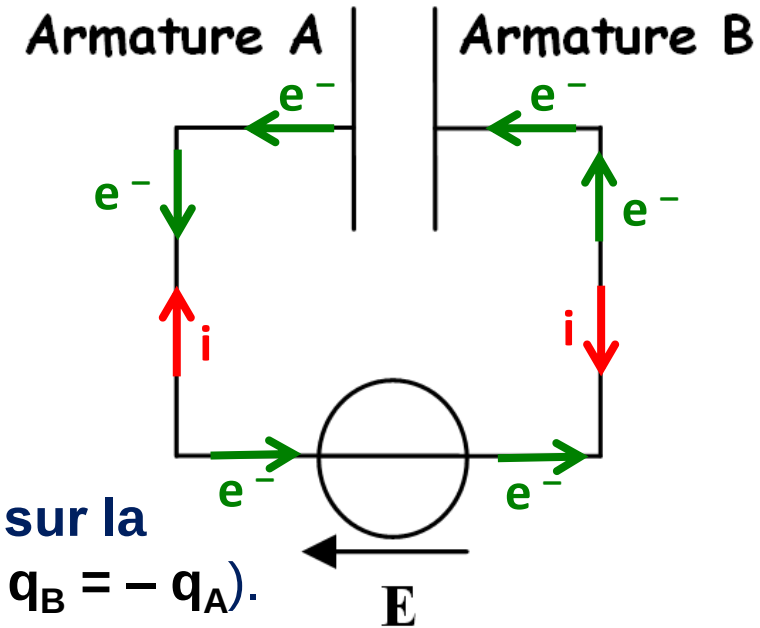
2) Comportement capacitif d'un condensateur

Aptitude à pouvoir **accumuler des charges électriques** opposées sur chacune de ses surfaces conductrices

✂ Application 1 : Justifier le comportement capacitif du condensateur à l'aide du circuit électrique ci-contre.

La présence du générateur impose la circulation d'un courant électrique :

- Des e^- sont **arrachés de la plaque A** qui **se charge positivement** (charge q_A) ;
- A cause du diélectrique, ces e^- s'accumulent sur la plaque B qui **se charge négativement** (charge $q_B = -q_A$).



☛ La CAPACITE d'un condensateur : De quelques **pF** (10^{-12} F) à **mF** (10^{-3} F)

- Proportionnelle à :
 - # la **surface S** des armatures en regard ;
 - # la **permittivité ϵ** du diélectrique ;
- Inversement proportionnelle à :
 - # la **distance e** séparant les armatures

$$C = \frac{\epsilon \times S}{e}$$

Annotations for the formula:

- C : en F
- ϵ : en $F.m^{-1}$
- S : en m^2
- e : en m

☛ La CAPACITE d'un condensateur :



Pour un matériau donné de permittivité ϵ , on définit la permittivité relative $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ où ϵ_0 est la permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,9.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$). Cette grandeur est sans unité et est toujours supérieure à 1.

(formule fournie)

$$C = \frac{\epsilon \times S}{e}$$

Annotations de la formule :

- C : en F
- ϵ : en F.m^{-1}
- S : en m^2
- e : en m

	Air	Plastique	Papier	Verre	Eau distillée
Permittivité ϵ (en F.m^{-1})	$8,9.10^{-12}$	$1,8.10^{-11}$	$3,3.10^{-11}$	$4,4.10^{-11}$	$7,1.10^{-10}$
Permittivité relative ϵ_r	1,0	2,0	3,7	5,0	80

☛ Application aux capteurs capacitifs :

Dispositifs dont la capacité varie en fonction de e , S et ϵ

✂ Application 2 : Quel paramètre est modifié dans chacune des actions schématisées ci-contre ?

☛ La capacité d'un condensateur :



Pour un matériau donné de permittivité ϵ , on définit la **permittivité relative** $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ où $\epsilon_0 = 8,9.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$. Cette grandeur est sans unité et est toujours supérieure à 1.

(formule fournie)

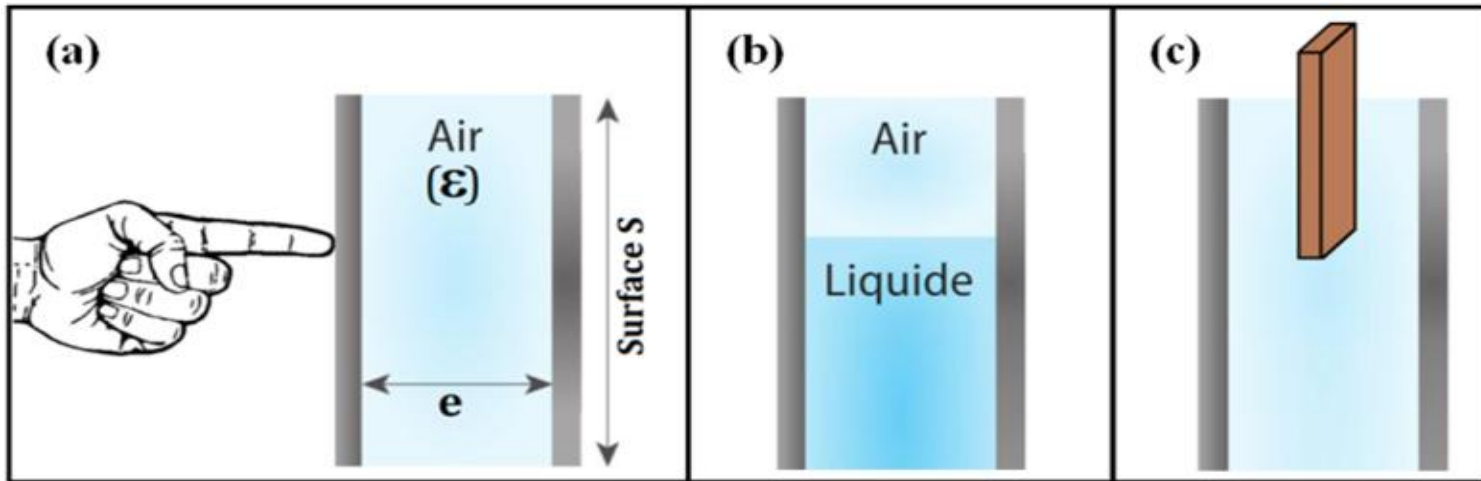
$$C = \frac{\epsilon \times S}{e}$$

Annotations de la formule :

- C : en F
- ϵ : en F.m^{-1}
- S : en m^2
- e : en m

☛ Application aux capteurs capacitifs :

✂ Application 2 : Quel paramètre est modifié dans chacune des actions ci-dessous ?



- a) diminution de « e » donc augmentation de la capacité (montre connectée, déclenchement airbag ...)
- b) changement de « ϵ » car changement de milieu (capteur de remplissage)
- c) diminution de « S » donc diminution de capacité (capteur de déplacement)

🔗 Application 2 : Quel paramètre est modifié dans chacune des actions ci-dessous ?

- a) diminution de « e » donc augmentation de la capacité (montre connectée, déclenchement airbag ...)
- b) changement de « ε » car changement de milieu (capteur de remplissage)
- c) diminution de « S » donc diminution de capacité (capteur de déplacement)

3) Relation entre grandeurs électriques

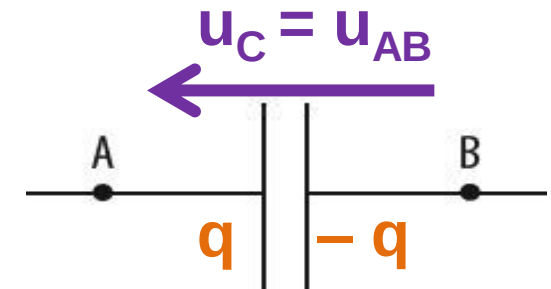
a/ Relation entre CHARGE et TENSION ELECTRIQUE

Soit :

- ♦ **C** la **capacité** du condensateur ;
- ♦ **u_C** la **tension électrique** aux bornes du condensateur ;
- ♦ **q** la **charge électrique** de l'armature du condensateur pointée par la flèche de tension u_C .

En Coulomb (C) — $q = C \times u_C$ — en Volt (V)

en Farad (F)



Vocabulaire

- $|q| \nearrow$: le condensateur **se charge** ;
- $|q| \searrow$: le condensateur **se décharge** ;
- $|q| \neq 0$: le condensateur **est chargé** ;
- $q = 0$: le condensateur **est déchargé** ;

3) Relation entre grandeurs électriques

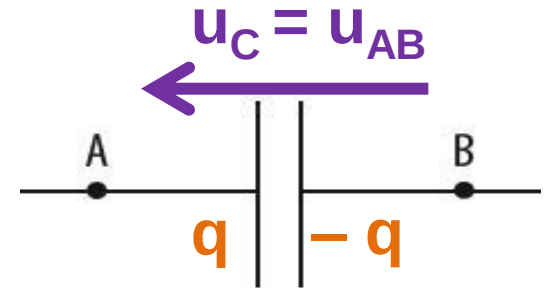
a/ Relation entre CHARGE et TENSION ELECTRIQUE

Soit :

- ♦ **C** la **capacité** du condensateur ;
- ♦ **u_C** la **tension électrique** aux bornes du condensateur ;
- ♦ **q** la **charge électrique** de l'armature du condensateur pointée par la flèche de tension u_C .

En Coulomb (C) — $q = C \times u_C$ — en Volt (V)

en Farad (F)



Vocabulaire

$|q| \nearrow$: le condensateur **se charge** ;
 $|q| \searrow$: le condensateur **se décharge** ;
 $|q| \neq 0$: le condensateur **est chargé** ;
 $q = 0$: le condensateur **est déchargé** ;

La charge électrique apparaît sur les armatures **de façon progressive**

➔ Conséquence : **La charge électrique q varie de façon continue** (au sens mathématique du terme), **tout comme la tension électrique u_C** aux bornes du condensateur.

La charge électrique apparaît sur les armatures **de façon progressive**

➔ **Conséquence** : **La charge électrique q varie de façon continue** (au sens mathématique du terme), **tout comme la tension électrique u_c aux bornes du condensateur.**

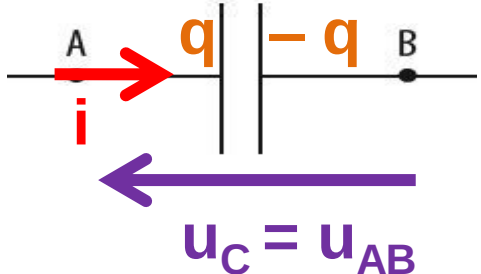
b/ Relation Intensité-Tension

La relation $q = C \times u_c$ donnée précédemment est valable à tout instant. Si l'on dérive chaque membre par rapport au temps, on obtient la relation :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(C \times u_c)}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i = C \times \frac{du_c}{dt}}$$

en Ampère (A) en Farad (F) en Volt (V) en seconde (s)

si on suppose la capacité constante





Cette relation n'est valable qu'en **convention RECEPTEUR** !

(En convention générateur, on aurait $i = - \frac{dq}{dt} = - C \times \frac{du_c}{dt}$)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(C \times u_c)}{dt} \Leftrightarrow i = C \times \frac{du_c}{dt}$$

en Ampère (A) en Farad (F) en Volt (V) en seconde (s)

si on suppose la capacité constante

(En convention générateur, on aurait $i = - \frac{dq}{dt} = - C \times \frac{du_c}{dt}$)

4) Energie stockée dans un condensateur

Expérience : https://www.youtube.com/watch?v=y_luASMIIFjM

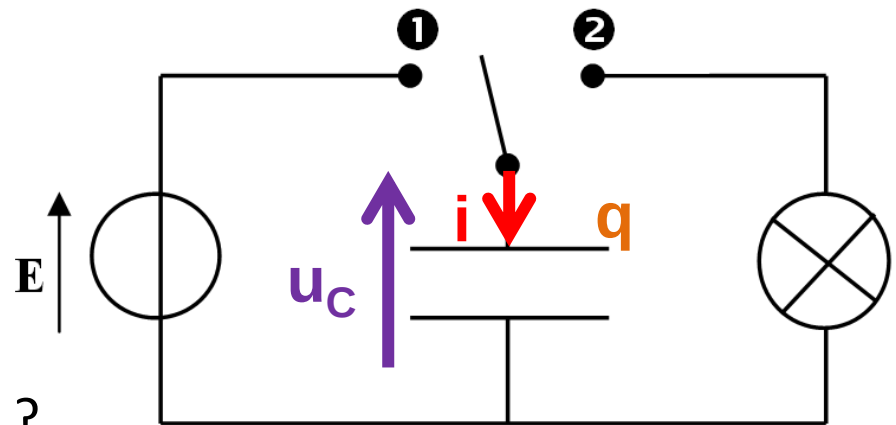
Qu'observe-t-on quand :

- on bascule l'interrupteur sur ① ?

La tension u_c passe **progressivement** de 0 V à environ 10 V : **le condensateur SE CHARGE progressivement.**

- on bascule ensuite l'interrupteur sur ② ?

La tension u_c passe **progressivement** de 10 V à environ 0 V : **le condensateur SE DECHARGE progressivement** et **fournit de l'énergie** à la lampe qui se met à briller.



4) Energie stockée dans un condensateur

Expérience : https://www.youtube.com/watch?v=y_luASMIFjIM

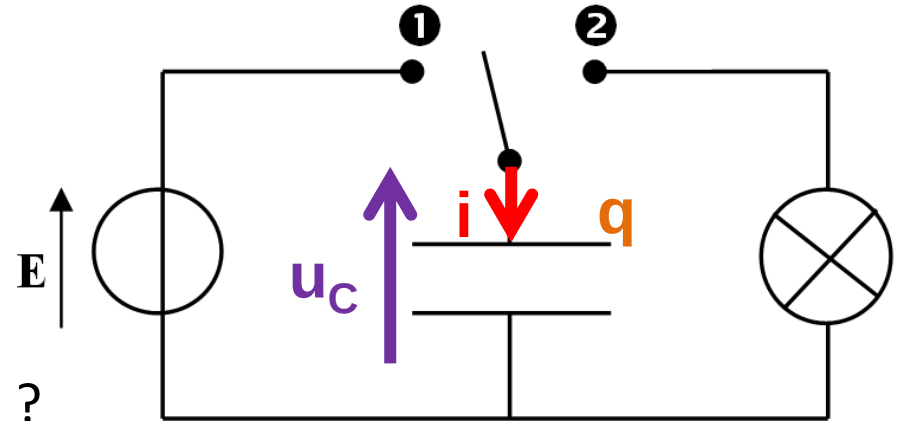
Qu'observe-t-on quand :

- on bascule l'interrupteur sur ① ?

La tension u_c passe **progressivement** de 0 V à environ 10 V : **le condensateur SE CHARGE progressivement.**

- on bascule ensuite l'interrupteur sur ② ?

La tension u_c passe **progressivement** de 10 V à environ 0 V : **le condensateur SE DECHARGE progressivement** et **fournit de l'énergie** à la lampe qui se met à briller.



☛ **Interprétation** : Au cours de la charge, le condensateur **emmagasine de l'énergie** qu'il **stocke**. Lors de la décharge, il **libère** cette énergie.

L'énergie électrique E_c stockée par un condensateur vérifie la relation :

en Joule (J)

$$E_c = \frac{1}{2} \times C \times u_c^2$$

en Farad (F)

en Volt (V)

☛ **Interprétation** : Au cours de la charge, le condensateur emmagasine de l'énergie qu'il stocke. Lors de la décharge, il libère cette énergie.

L'énergie électrique E_c stockée par un condensateur vérifie la relation :

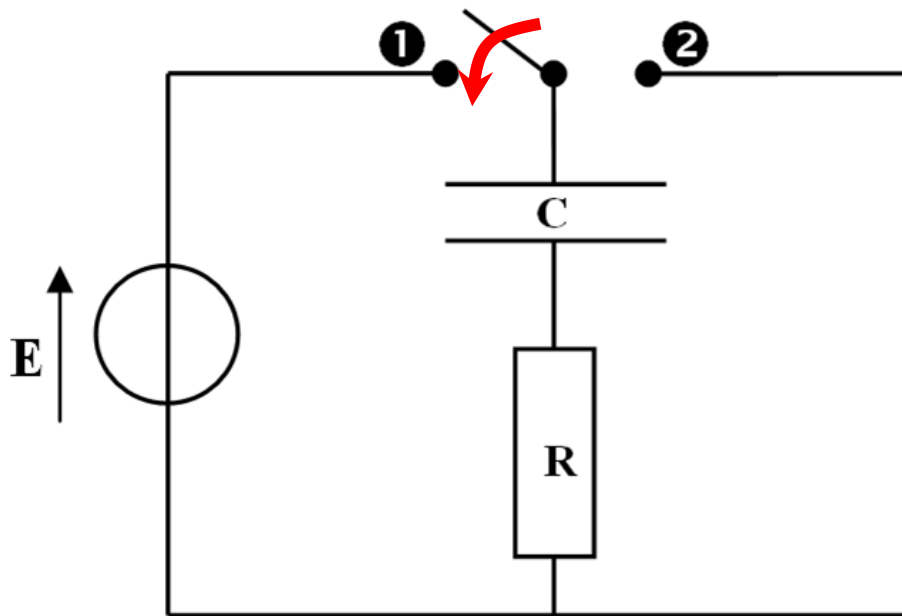
en Joule (J)

$$E_c = \frac{1}{2} \times C \times u_c^2$$

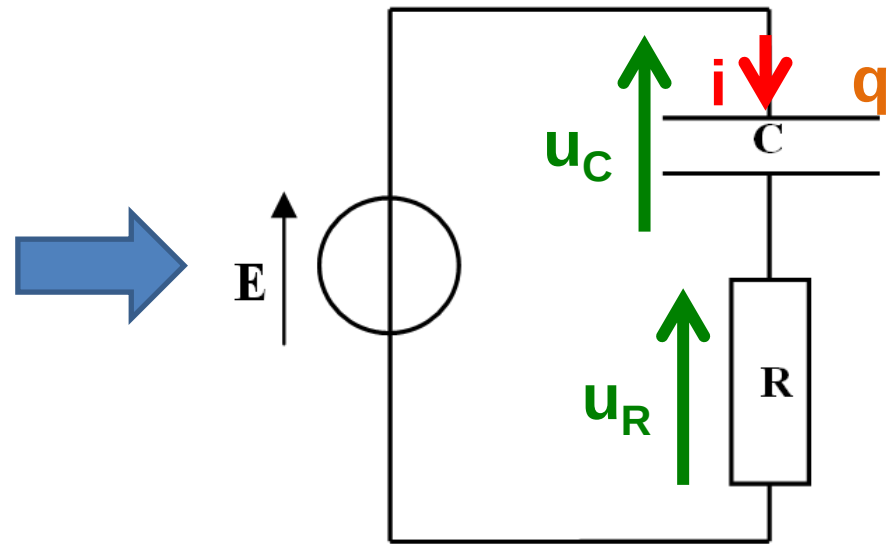
en Farad (F)

en Volt (V)

II- Le modèle du circuit RC série



1) CHARGE du condensateur



a/ Présentation de la situation

➡ **Conditions initiales** : Avant de basculer l'interrupteur sur la position ❶, le condensateur est déchargé. Que peut-on alors dire de la tension u_c aux bornes du condensateur à $t = 0$?

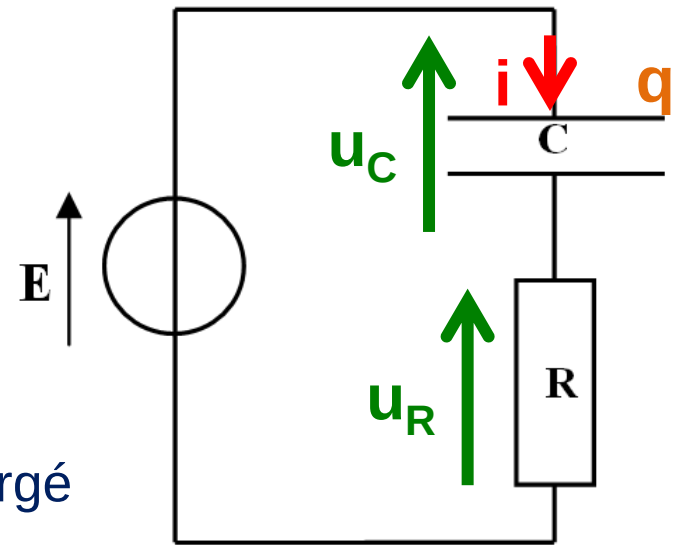
1) CHARGE du condensateur

a/ Présentation de la situation

➔ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❶, le condensateur est déchargé. Que peut-on alors dire de la tension u_C aux bornes du condensateur à $t = 0$?

Pour $t < 0$ s, on a $u_C = 0$ V (condensateur déchargé donc $q = 0$)

Comme u_C est une fonction continue du temps, on a aussi $u_C(t = 0) = 0$ V.



b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

☛ Loi des mailles : $E - u_C - u_R = 0$

☛ Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique : En convention récepteur,
 $u_R = R \times i$

☛ Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur :

En convention récepteur, $i = C \times \frac{du_C}{dt}$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

☛ Loi des mailles : $E - u_C - u_R = 0$

☛ Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique : En convention^o récepteur, $u_R = R \times i$

☛ Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur :

$$\text{En convention récepteur, } i = C \times \frac{du_C}{dt}$$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

☛ Solution particulière : On propose $u_{C,p} = E$

☛ Solution de l'équation homogène :

Mme MOREL
is back !!!

Si l'équation homogène (H) est : $ay' + by = 0$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

☛ Solution particulière : On propose $u_{C,p} = E$

☛ Solution de l'équation homogène :

On propose $u_{C,eh} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

Si l'équation homogène (H) est : $ay' + by = 0$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

☛ Solution générale :

$$u_C = u_{C,p} + u_{C,eh}$$

Soit $u_C = E + K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

☛ Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K :

A la date $t = 0$, la tension u_C aux bornes du condensateur vaut **0 V**

☛ Solution générale de l'équation différentielle :

$$u_C = u_{C,p} + u_{C,eh}$$

Soit

$$u_C = E + K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

☛ Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K :

A la date $t = 0$, la tension u_C aux bornes du condensateur vaut 0 V

$$-\frac{1}{RC} \times 0$$

Or, à cette date, $0 = E + K \times e$

$\Leftrightarrow$

$$0 = E + K$$

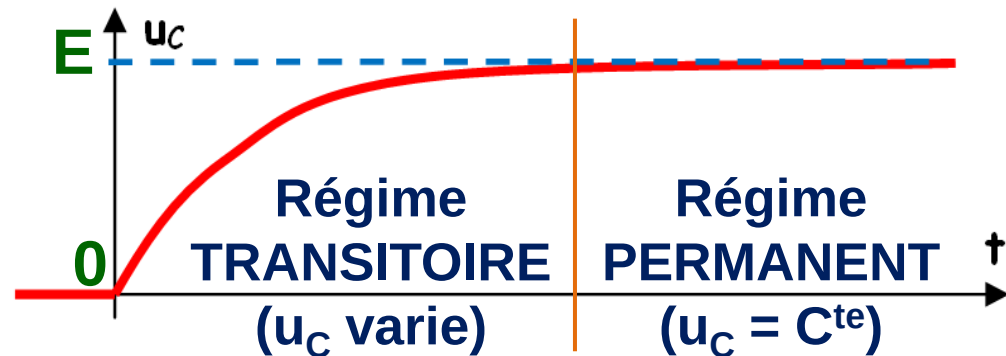
$\Leftrightarrow$

$$K = -E$$

☛ Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la charge :

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \times t} \right)$$

On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u_C) = E$



d/ L'intensité i du courant électrique

☛ Expression de i en fonction du temps :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

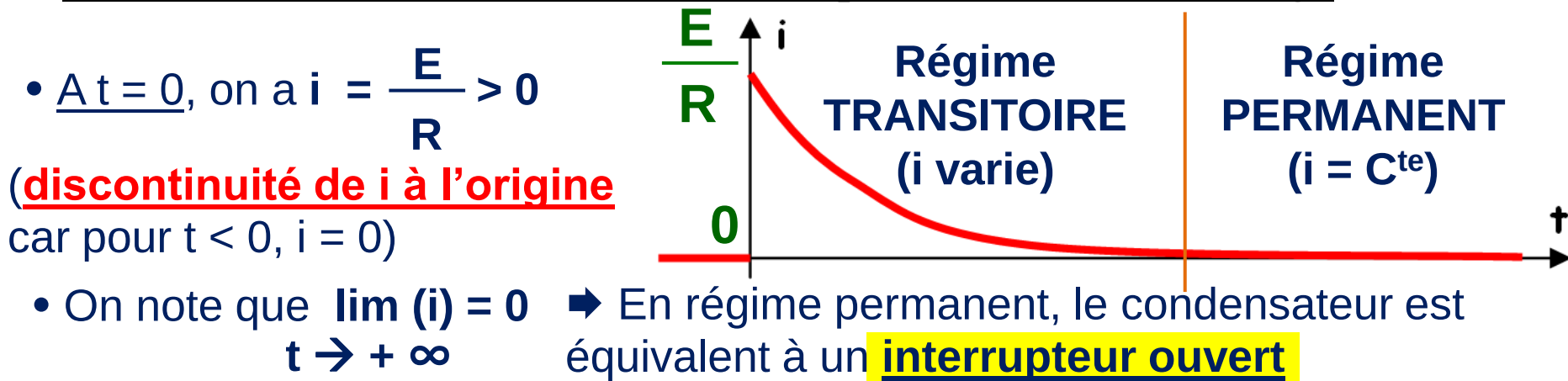
d/ L'intensité i du courant électrique

☛ Expression de i en fonction du temps :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

$$\text{Or, } u_R = E - u_C = E - E \times \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \times t}\right) \Leftrightarrow i = \frac{E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

☛ Evolution de l'intensité du courant électrique i au cours de la charge :



e/ Temps caractéristique de la charge

☛ Expression : Le temps caractéristique τ du circuit (ou **constante de temps** du circuit) est égal au produit $R \times C$. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde.

en Ohm (Ω) en Farad (F)

☛ Evolution de l'intensité du courant électrique i au cours de la charge :

- At $t=0$, on a $i = \frac{E}{R} > 0$
(discontinuité de i à l'origine
car pour $t < 0$, $i = 0$)



- On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (i) = 0$

➔ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert

e/ Temps caractéristique de la charge

- ☛ Expression : Le temps caractéristique τ du circuit (ou **constante de temps** du circuit) est égal au produit $R \times C$. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde.
en Ohm (Ω) × C en Farad (F)

☞ Application 4 : Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit $R \times C$ est homogène à une durée.

$$[R \times C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]} = [\text{temps}]$$

- ☛ Interprétation : On estime que le régime permanent est atteint au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

e/ Temps caractéristique de la charge

☛ Expression : Le temps caractéristique τ du circuit (ou constante de temps du circuit) est égal au produit $R \times C$. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde. **en Ohm (Ω)** **en Farad (F)**

☞ Application 4 : Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit $R \times C$ est homogène à une durée.

$$[R \times C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]} = [\text{temps}]$$

☛ Interprétation : On estime que le régime permanent est atteint au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

☞ Application 5 : A l'aide de l'expression de u_C établie au II-1.b), vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right)$$

$$\text{Soit } u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-5}) \quad \text{Soit } \underline{u_C(5\tau) = 0,993 E}$$

Condensateur chargé à 99,3 %

✎ **Application 5** : A l'aide de l'expression de u_C établie au II-1.b), vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right)$$

Soit $u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-5})$ Soit $u_C(5\tau) = 0,993 E$

Condensateur chargé à 99,3 %

☛ Détermination graphique :

METHODE 1 : méthode de la charge à 63 %

Abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle $u_C = 0,63 \times E$.

METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine

Abscisse du point de croisement de l'asymptote horizontale du graphique $u_C = f(t)$ et de la tangente à l'origine

✎ **Application 6** : Déterminer la constante de temps τ du circuit dont l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.

✂ **Application 5** : A l'aide de l'expression de u_C , vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right)$$

Soit $u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-5})$ Soit $u_C(5\tau) = 0,993 E$

Condensateur chargé à 99,3 %

✂ **Application 6** : Déterminer la constante de temps τ du circuit dont l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.

• **Méthode 1** : $E = 5 \text{ V}$.

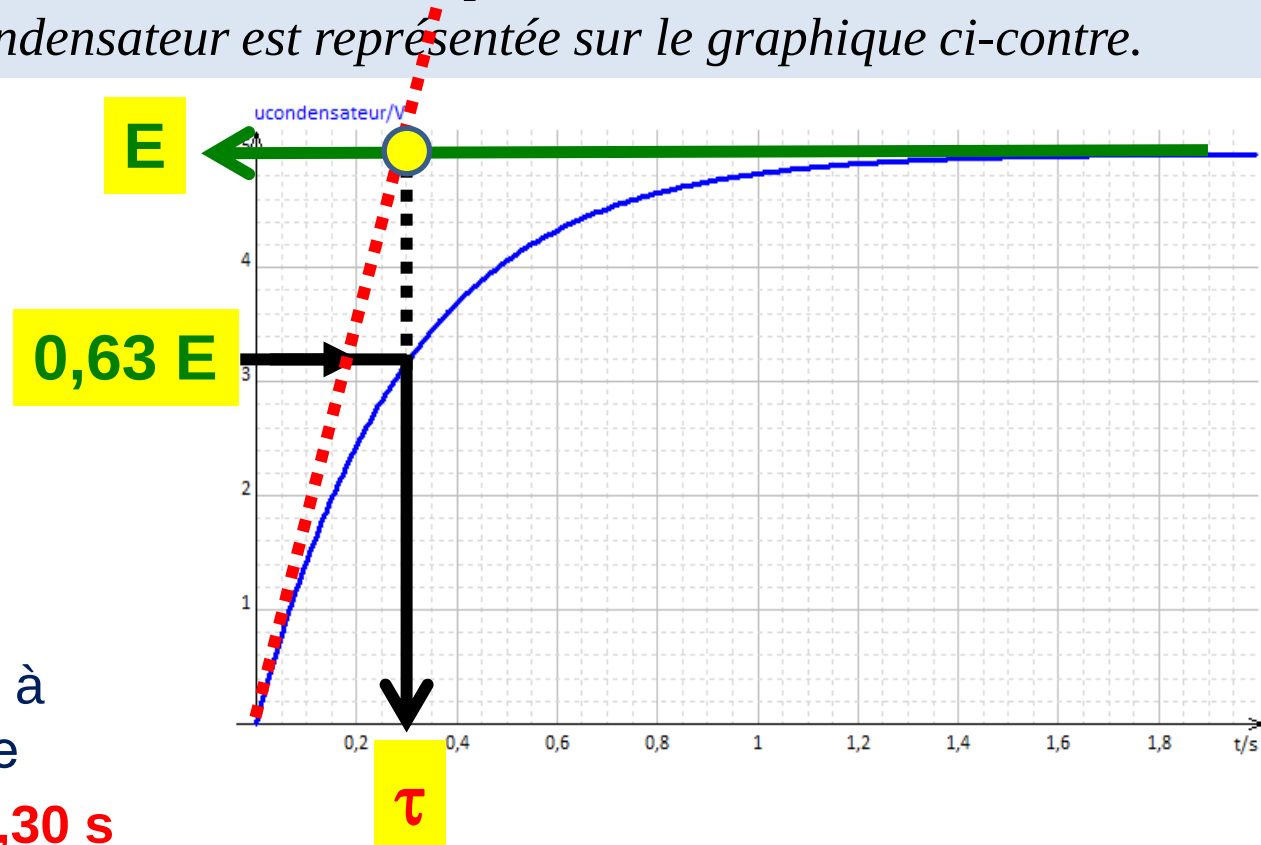
On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle : $u_C = 0,63 \times E$

$$u_C = 0,63 \times 5$$

$$u_C = 3,15 \text{ V}.$$

On obtient $\tau \approx 0,30 \text{ s}$

• **Méthode 2** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour $t = \tau \approx 0,30 \text{ s}$



• **Méthode 1** : $E = 5 \text{ V}$.

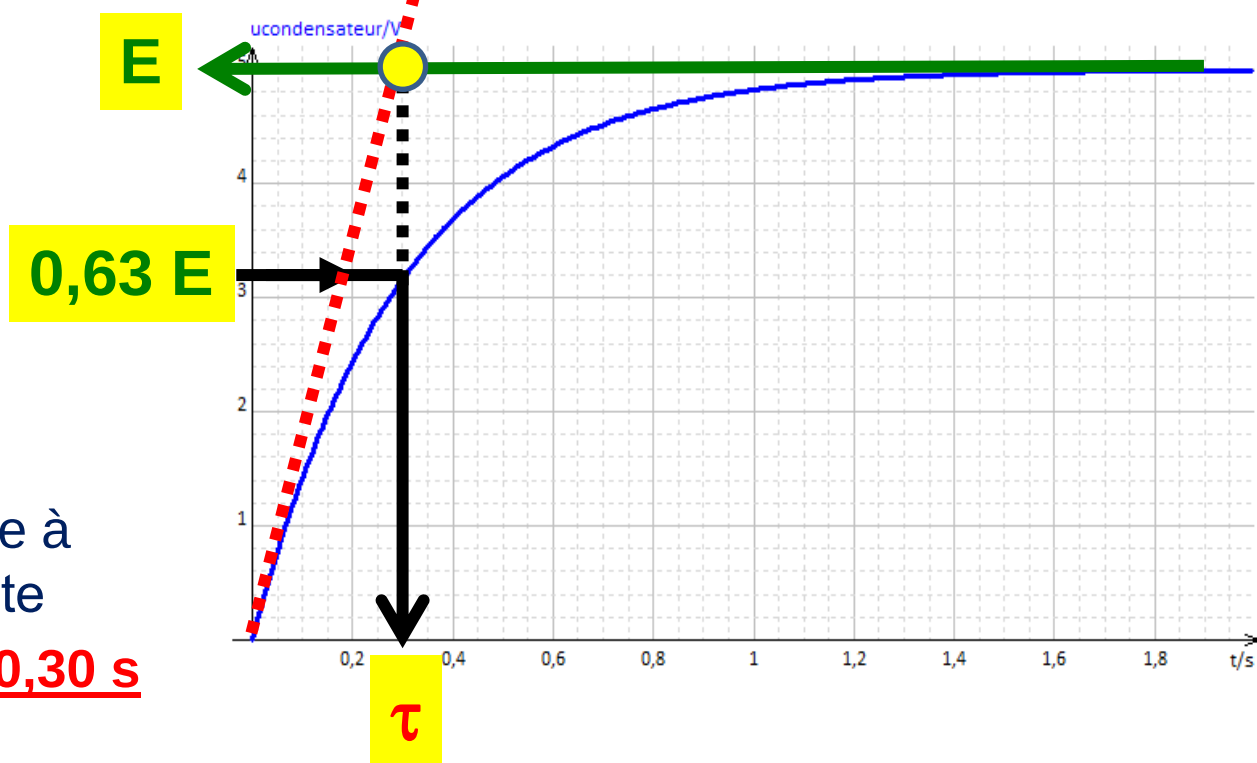
On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle : $u_C = 0,63 \times E$

$$u_C = 0,63 \times 5$$

$$u_C = 3,15 \text{ V}.$$

On obtient $\tau \approx 0,30 \text{ s}$

• **Méthode 2** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour $t = \tau \approx 0,30 \text{ s}$



f/ Bilan de puissance et d'énergie

$E = u_C + u_R \rightarrow$ Bilan de PUISSANCE obtenu en *multipliant par « i »*

$$E \times i = u_C \times i + u_R \times i$$

$E \times i$ = puissance algébriquement FOURNIE par le générateur (c° générateur)

$u_C \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le condensateur (c° récepteur)

$u_R \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le conducteur ohmique (c° récepteur)

f/ Bilan de puissance et d'énergie

$$E \times i = u_C \times i + u_R \times i$$

$E \times i$ = puissance algébriquement FOURNIE par le générateur (c° générateur)

$u_C \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le condensateur (c° récepteur)

$u_R \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le conducteur ohmique (c° récepteur)

→ Bilan d'ENERGIE obtenu en *multipliant par « dt »*

$$E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt$$

$E \times i \times dt$ = énergie algébriquement FOURNIE par le générateur pendant dt

$u_C \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le condensateur pendant dt

$u_R \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique pendant dt

• Energie algébriquement FOURNIE par le générateur :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E \times i \times dt &= \int_0^{\infty} E \times \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \times dt = \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} \times dt \\ &= \frac{E^2}{R} \times \left[-RC e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} \times [0 - (-RC)] \end{aligned}$$

$$E_{\text{générateur}} = CE^2$$

> 0 en convention générateur : le générateur cède cette énergie au reste du circuit

$$E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt$$

$E \times i \times dt$ = énergie algébriquement FOURNIE par le générateur pendant dt
 $u_C \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le condensateur pendant dt
 $u_R \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique pendant dt

- Energie algébriquement FOURNIE par le générateur :

$$E_{\text{générateur}} = CE^2 > 0 \text{ en convention générateur : le générateur } \underline{\text{cède}} \text{ cette énergie au reste du circuit}$$

- Energie algébriquement RECUE par le condensateur :

$$\int_0^{\infty} u_C \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) \times dt$$

> 0 en convention récepteur :
 le condensateur reçoit cette énergie

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[-RC e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty}$$

$$E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[-RC \times 0 + \frac{RC}{2} \times 0 - \left(-RC + \frac{RC}{2} \right) \right]$$

$$E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt$$

- Energie algébriquement FOURNIE par le générateur :

$$E_{\text{générateur}} = CE^2$$

> 0 en convention générateur : le générateur cède cette énergie au reste du circuit

- Energie algébriquement RECUE par le condensateur :

$$E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}$$

> 0 en convention récepteur : le condensateur reçoit cette énergie

- Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u_R \times i \times dt &= \int_0^{\infty} R \times i^2 \times dt = \int_0^{\infty} R \times \frac{E^2}{R^2} \times e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt \\ &= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt = \frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} \times \left[\frac{RC}{2} \right] \\ &= \frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \right) \right] \quad E_{\text{conducteur ohmique}} = \frac{CE^2}{2} \end{aligned}$$

> 0 en convention récepteur : le conducteur ohmique reçoit cette énergie

$$E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt$$

- Energie algébriquement FOURNIE par le générateur :

$$E_{\text{générateur}} = CE^2$$

> 0 en convention générateur : le générateur cède cette énergie au reste du circuit

- Energie algébriquement RECUE par le condensateur :

$$E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}$$

> 0 en convention récepteur : le condensateur reçoit cette énergie

- Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique :

$$E_{\text{conducteur ohmique}} = \frac{CE^2}{2}$$

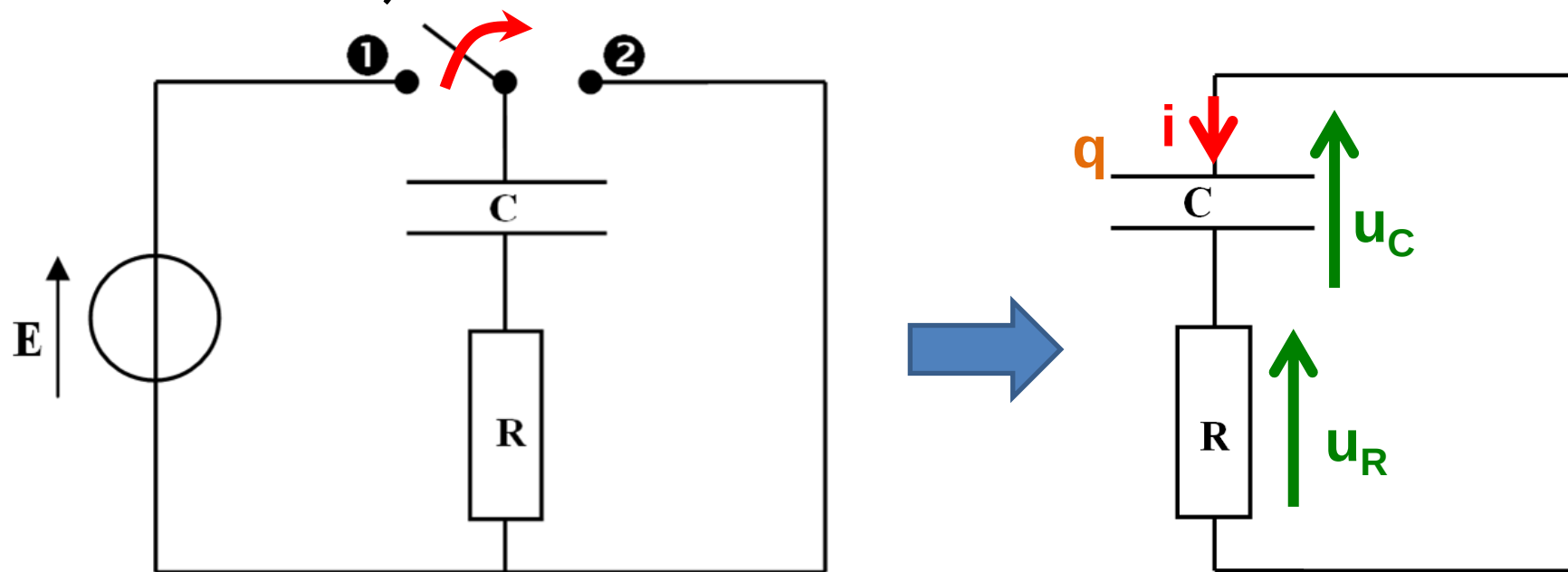
> 0 en convention récepteur : le conducteur ohmique reçoit cette énergie

Seulement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension est stockée dans le condensateur, l'autre moitié étant fournie au conducteur ohmique.

$E_{\text{générateur}} = CE^2$	$E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}$	$E_{\text{conducteur ohmique}} = \frac{CE^2}{2}$
--------------------------------	--	--

Seulement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension est stockée dans le condensateur, l'autre moitié étant fournie au conducteur ohmique.

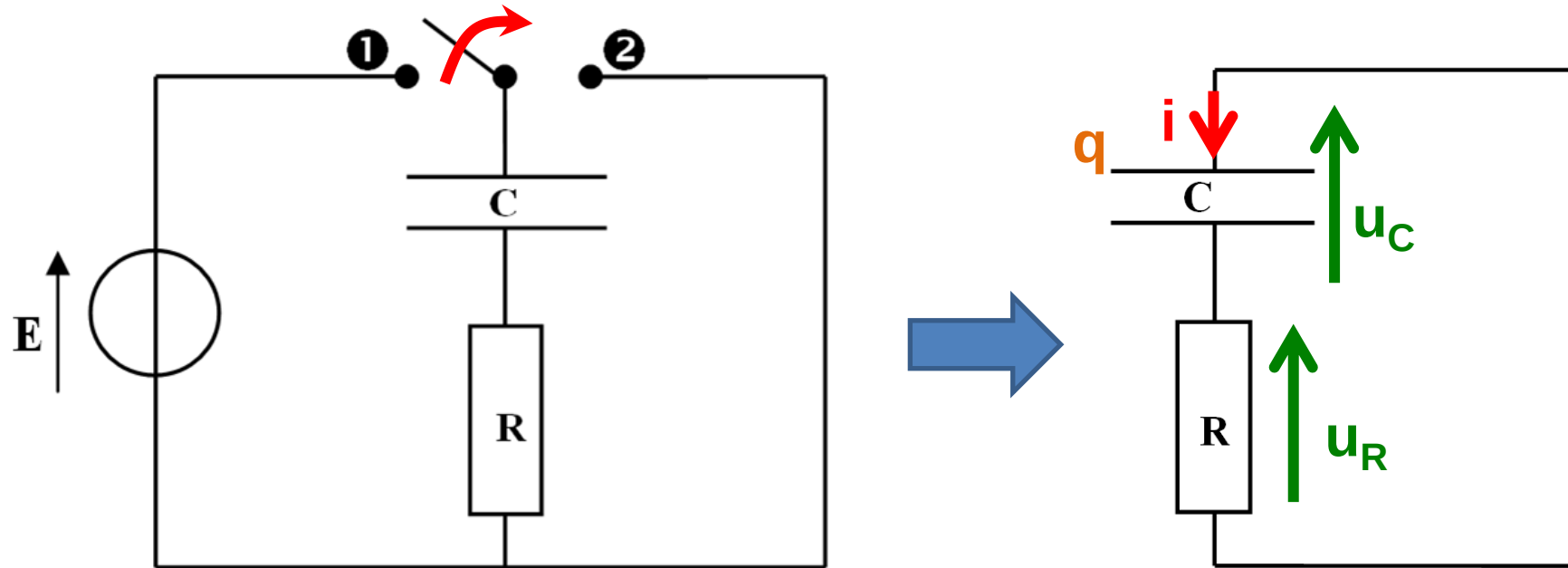
2) DECHARGE du condensateur



a/ Présentation de la situation

➔ Conditions initiales : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ②, le condensateur était chargé. Que peut-on dire de la tension u_C aux bornes du condensateur à $t = 0$?

2) DECHARGE du condensateur



a/ Présentation de la situation

➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ②, le condensateur était chargé. Que peut-on dire de la tension u_C aux bornes du condensateur à $t = 0$?

Pour $t < 0$ s, on a $u_C = E$ (condensateur chargé, régime permanent atteint)

Comme u_C est une fonction continue du temps, on a aussi $u_C(t = 0) = E$.

b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

☛ Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

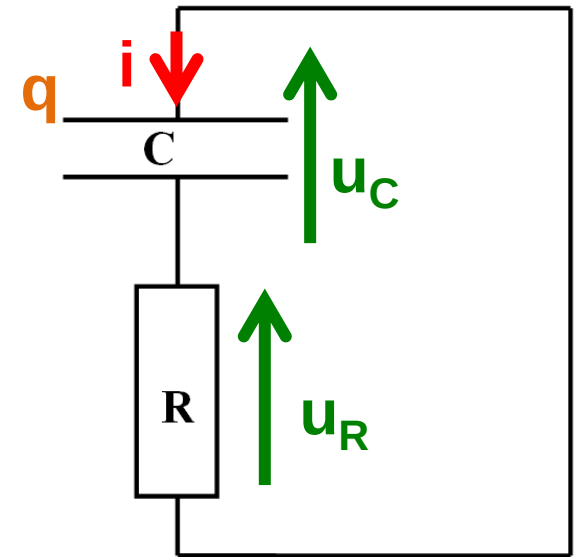
2) DECHARGE du condensateur

a/ Présentation de la situation

➔ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ②, le condensateur était chargé. Que peut-on dire de la tension u_C aux bornes du condensateur à $t = 0$?

Pour $t < 0$ s, on a $u_C = E$ (condensateur chargé, régime permanent atteint)

Comme u_C est une fonction continue du temps, on a aussi $u_C(t = 0) = E$.



b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

☛ Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

☛ Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique : En convention récepteur,
 $u_R = R \times i$

☛ Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur :

En convention récepteur, $i = C \times \frac{du_C}{dt}$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0$$

Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre sans 2nd membre

b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

☛ Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

☛ Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique : En convention^o récepteur, $u_R = R \times i$

☛ Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur :

$$\text{En convention récepteur, } i = C \times \frac{du_C}{dt}$$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0$$

Equation différentielle linéaire
du 1^{er} ordre sans 2nd membre

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

☛ Solution générale de l'équation différentielle :

Mme MOREL
is back again !!!

Si l'équation homogène (H) est : $ay' + by = 0$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

On propose $u_C = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

☛ Réexpression de la loi des mailles :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0$$

Equation différentielle linéaire
du 1^{er} ordre sans 2nd membre

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

☛ Solution de l'équation différentielle :

On propose $u_C = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

☛ Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K :

Si l'équation homogène (H) est : $ay' + by = 0$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

A la date $t = 0$, la tension u_C aux bornes du condensateur vaut **E**

$$- \frac{1}{RC} \times 0$$

Or, à cette date, $E = K \times e$

$$\Leftrightarrow K = E$$

☛ Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge :

$$u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u_C) = 0$

☛ Solution générale de l'équation homogène :

$$\text{On propose } u_{C2} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

☛ Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K :

A la date $t = 0$, la tension u_C aux bornes du condensateur vaut E

$$-\frac{1}{RC} \times 0$$

Or, à cette date, $E = K \times e$

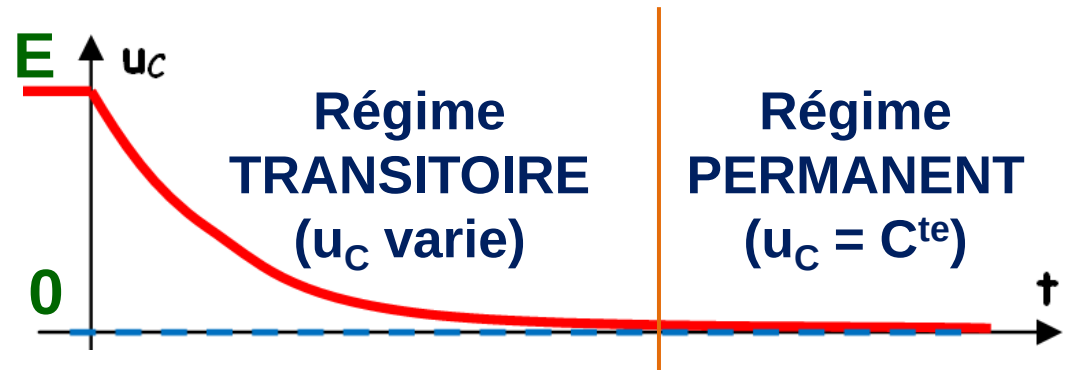
$\Leftrightarrow$

$$K = E$$

☛ Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge :

$$u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u_C) = 0$



d/ L'intensité i du courant électrique

☛ Expression de i en fonction du temps :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

☛ Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge :

$$u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u_C) = 0$



d/ L'intensité i du courant électrique

☛ Expression de i en fonction du temps :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

Or, $u_R + u_C = 0$ Donc $i = \frac{-u_C}{R}$

$$i = \frac{-E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

☛ Evolution de l'intensité du courant électrique i au cours de la décharge :

• At $t=0$, on a $i = \frac{-E}{R} < 0$

• On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (i) = 0$

(discontinuité de i à l'origine
car pour $t < 0$, $i = 0$)

➔ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert**

d/ L'intensité i du courant électrique

☛ Expression de i en fonction du temps :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

Or, $u_R + u_C = 0$ Donc $i = \frac{-u_C}{R}$

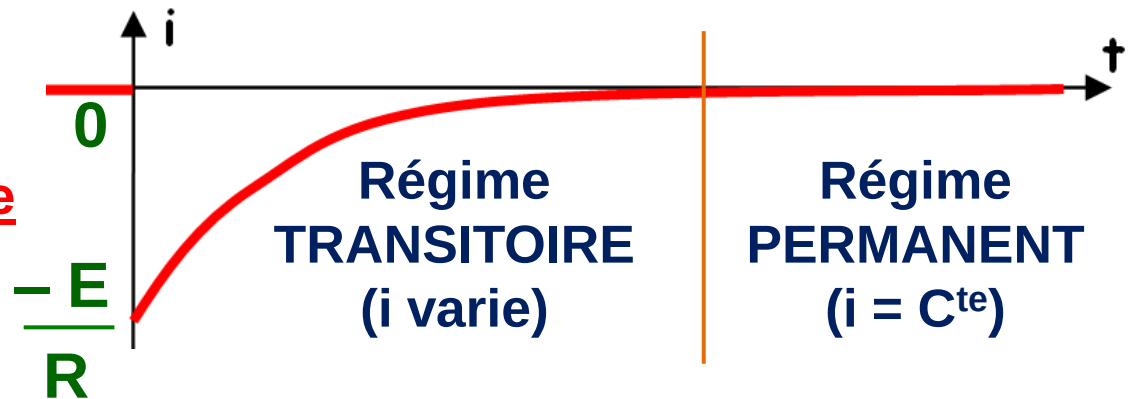
$$i = \frac{-E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$$

☛ Evolution de l'intensité du courant électrique i au cours de la décharge :

• At $t = 0$, on a $i = \frac{-E}{R} < 0$

(discontinuité de i à l'origine
car pour $t < 0$, $i = 0$)

• On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (i) = 0$



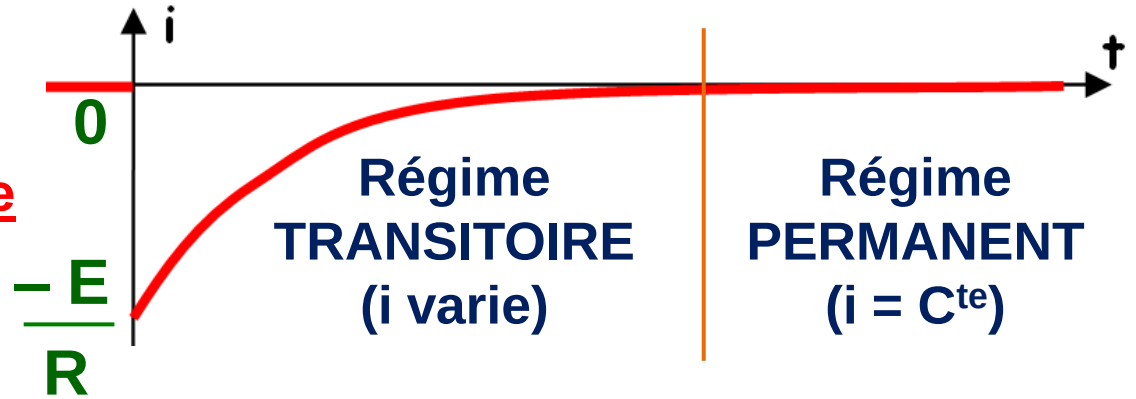
➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert

e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ Expression : Le temps caractéristique τ de décharge du circuit est *le même*
que le temps caractéristique de charge, soit $\tau = R \times C$.

☛ Evolution de l'intensité du courant électrique i au cours de la décharge :

- A $t = 0$, on a $i = \frac{-E}{R} < 0$



(discontinuité de i à l'origine
car pour $t < 0$, $i = 0$)

- On note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (i) = 0$

➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert**

e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ Expression : Le temps caractéristique τ de décharge du circuit est **le même que le temps caractéristique de charge**, soit **$\tau = R \times C$** .

☛ Interprétation : Lors de la décharge comme lors de la charge, on estime que le **régime permanent est atteint** au bout d'une durée égale à **$5 \times \tau$** .

✂ Application 7 : A l'aide de l'expression de u_C établie au II-2.b), vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E \times e^{-5}$$

e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ Expression : Le temps caractéristique τ de décharge du circuit est **le même que le temps caractéristique de charge**, soit $\tau = R \times C$.

☛ Interprétation : Lors de la décharge comme lors de la charge, on estime que le **régime permanent est atteint** au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

✎ Application 7 : A l'aide de l'expression de u_C établie au II-2.b), vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E \times e^{-5}$$

Soit $\underline{u_C(5\tau) = 0,007 E}$ Condensateur déchargé à **99,3 %**

☛ Détermination graphique :

METHODE 1 : méthode de la décharge à 63 %

Abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle $\underline{u_C = 0,37 \times E}$.

METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine

Abscisse du point de croisement de l'**asymptote horizontale** du graphique $u_C = f(t)$ et de la **tangente à l'origine**

✂ **Application 7** : A l'aide de l'expression de u_C établie au II-2.b), vérifier l'affirmation précédente.

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Donc pour } t = 5\tau, \quad u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E \times e^{-5}$$

Soit $\underline{u_C(5\tau) = 0,007 E}$ Condensateur déchargé à 99,3 %

✂ **Application 8** : Déterminer la constante de temps τ du circuit dont l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.

• **Méthode 1** : $E = 5 \text{ V}$.

On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle : $u_C = 0,37 \times E$

$$u_C = 0,37 \times 5$$

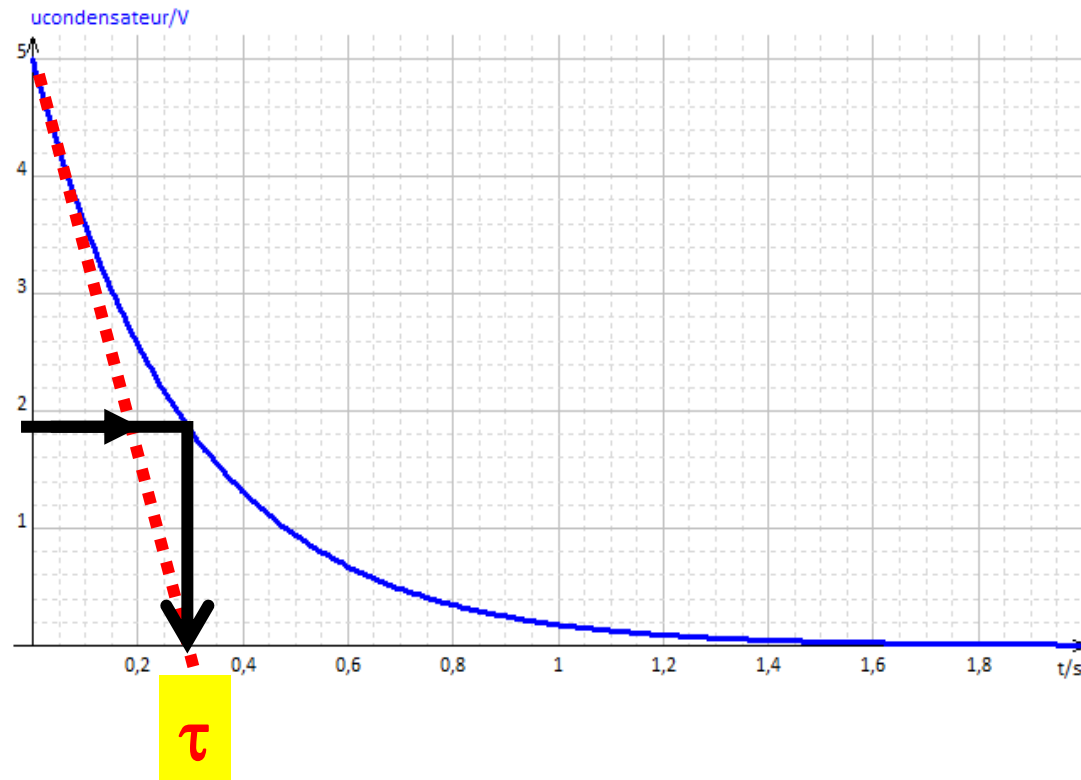
$$u_C = 1,85 \text{ V.}$$

$$0,37 E$$

On obtient $\underline{\tau \approx 0,30 \text{ s}}$

• **Méthode 2** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote

horizontale pour $t = \underline{\tau \approx 0,30 \text{ s}}$



Application 8 :

- Méthode 1 : $E = 5 \text{ V}$.

On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle :

$$u_C = 0,37 \times E = 0,37 \times 5$$

$$u_C = 1,85 \text{ V}.$$

On obtient $\tau \approx 0,30 \text{ s}$

$$0,37 E$$

- Méthode 2 : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour $t = \tau \approx 0,30 \text{ s}$



f/ Bilan de puissance et d'énergie

$u_C + u_R = 0 \rightarrow$ Bilan de PUISSANCE obtenu en *multipliant par « i »*

$$u_C \times i + u_R \times i = 0$$

$u_C \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le condensateur (c° récepteur)

$u_R \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le conducteur ohmique (c° récepteur)

f/ Bilan de puissance et d'énergie

$u_C + u_R = 0 \rightarrow$ Bilan de PUISSANCE obtenu en *multipliant par « i »*

$$u_C \times i + u_R \times i = 0$$

$u_C \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le condensateur (c° récepteur)

$u_R \times i$ = puissance algébriquement RECUE par le conducteur ohmique (c° récepteur)

$\rightarrow$ Bilan d'ENERGIE obtenu en *multipliant par « dt »*

$$u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt = 0$$

$u_C \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le condensateur pendant dt

$u_R \times i \times dt$ = énergie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique pendant dt

• Energie reçue algébriquement par le condensateur entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u_C \times i \times dt &= \int_0^{\infty} E \times e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(\frac{-E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \right) \times dt = \frac{-E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt \\ &= \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1 \right) \right] \end{aligned}$$

- Energie reçue algébriquement par le condensateur entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{\infty} u_C \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(\frac{-E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \right) \times dt = \frac{-E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1 \right) \right]$$

< 0 en convention récepteur : le condensateur cède cette énergie au conducteur ohmique

$$E_{\text{condensateur}} = -\frac{CE^2}{2}$$

- Energie reçue algébriquement par le conducteur ohmique entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{\infty} u_R \times i \times dt = \int_0^{\infty} R \times i^2 \times dt = \int_0^{\infty} R \times \frac{E^2}{R^2} \times e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt = \text{opposé de la relation précédente}$$

> 0 en convention récepteur : le conducteur ohmique reçoit cette énergie

$$E_{\text{conducteur ohmique}} = \frac{CE^2}{2}$$

Le conducteur ohmique reçoit la totalité de l'énergie cédée par le condensateur