

Devoir Maison 11

À rendre vendredi 27 mars 2026

Exercice : Évolution de populations de poissons

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population d'une année sur l'autre varie donc en fonction :

- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction) ;
- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction :

- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction) ;
- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n (respectivement b_n) le nombre de gardons (resp. de brochets) au 1er janvier de l'année 2021 + n .

1. Partie 1

Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites (g_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la matrice $U_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1.0. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.1. En déduire une relation entre U_n , A^n et U_0 .

1.2. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .

1.3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .

1.4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

1.6. En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous ?

2. Partie 2

Pour enrayer l'extinction des espèces, on décide de relâcher chaque année 30 gardons dans l'étang. Dans cette deuxième modélisation, les deux suites (g_n) et (b_n) vérifient donc maintenant les relations :

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n + 30 \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

de sorte que, en gardant les mêmes notations, on a $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.1. Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse.

2.2. On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C .

2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$.

2.4. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0 .

2.5. On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n) .

2.6. Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas ? Interpréter.

Note : Cet exercice est inspiré des travaux de Vito Volterra et James Lotka sur la dynamique des populations.