DM 10 – CORRIGÉ
20/03/2026

Exercice 1

(1.) On note les évènements :

D = " la pièce est défectueuse "

A = " la pièce est acceptée "

On cherche $P(\bar{A} \cap \bar{D}) = P_{\bar{D}}(\bar{A}) \times P(\bar{D})$

$= (1 - P_{\bar{D}}(A)) \times P(\bar{D})$

$= \left(1 - \frac{99}{100}\right) \times \frac{3}{100}$

$= \boxed{\frac{1}{100} \times \frac{3}{100}}$

(2.) $D, \bar{D}$ forment un SCE

donc FPT :

$P(A) = P_D(A) \times P(D) + P_{\bar{D}}(A) \times P(\bar{D})$

$= (1 - P_D(\bar{A})) \times \frac{3}{100} + \frac{99}{100} \times (1 - P(D))$

$= \left(1 - \frac{98}{100}\right) \times \frac{3}{100} + \frac{99}{100} \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)$

$= \left(\frac{2}{100} - \frac{99}{100}\right) \times \frac{3}{100} + \frac{99}{100}$

$= -\frac{97 \times 3}{100 \times 100} + \frac{\overset{3\times 33}{\overline{99}} \times 100}{100 \times 100}$

$= \frac{3 \times (330 - 97)}{10^4} = \frac{3 \times 233}{10^4} = \boxed{\frac{699}{10^4}}$

(3.) On cherche $P(E)$ où $E =$ " le contrôle connaît une erreur "

$E = (A \cap D) \cup (\bar{A} \cap \bar{D})$ union incompatible

donc $P(E) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap \bar{D})$

$$= P_D(A) \times P(D) + P_{\bar{D}}(\bar{A}) \times P(\bar{D})$$

$$= \left(1 - \frac{98}{100}\right) \times \frac{3}{100} + \left(1 - \frac{99}{100}\right) \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

$$= \frac{2}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{100}\left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{100}$$

$$= \boxed{\frac{103}{100 \times 100}.}$$

(4.) Formule de Bayes :

$$P_A(D) = \frac{P_D(A) \times P(D)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{100} \times \frac{\cancel{3}}{100}}{\frac{\cancel{3} \times 233}{100 \times 100}} = \boxed{\frac{2}{233}}$$

Exercice 2

(1.) On note l'événement :

$C_n =$ " l'information est correcte après n transmissions "

$C_n, \bar{C}_n$ forment un sce

FPT :

$$P(C_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) \times P(C_n) + P_{\bar{C}_n}(C_{n+1}) \times P(\bar{C}_n)$$

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p)(1-p_n)$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad p_{n+1}=(2p-1)p_n+(1-p)}$$

(2) On résout $x=(2p-1)x+(1-p)$ sur $\mathbb{R}$

$\iff 2(1-p)x=1-p$

si $p\neq 1$ $\iff x=\dfrac{1-p}{2(1-p)}=\dfrac{1}{2}$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\left(p_0-\frac{1}{2}\right)(2p-1)^n+\frac{1}{2}$ $\qquad p_0=1$

$$\boxed{p_n=\frac{1}{2}(2p-1)^n+\frac{1}{2}}$$

si $p=1$: l'information est toujours bien transmise

et $p_{n+1}=p_n\ \forall n\in\mathbb{N}$ et $p_0=1$

donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=1}$

(3.) si $p=1$ (cf question précédente)

(si $p=\frac{1}{2}$: $2p-1=0$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{cas équiprobable et } \lim_{n\to+\infty} p_n=\frac{1}{2}}$)

si $p=0$ $(2p-1=-1)$ l'information est toujours mal transmise

et $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{2}$

donc (p_n) n'a pas de limite

- si $0 < p < 1$ $\left(p = \frac{1}{2} \text{ OK}\right)$

$-1 < 2p-1 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} (2p-1)^n = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$: on tend vers un cas d'équiprobabilité pour un grand nb de transmission.

Exercice 3

On note V_k = "on obtient le premier ticket valide au bout de k tirages"

Comme il y a 5 tickets valides sur les 12, il y a donc 7 tickets non valides.

$$\boxed{\forall k \in [\![9, 12]\!],\ P(V_k) = 0.}$$

$\forall k \in [\![1, 8]\!]$: on note T_k = " on tire un ticket valide au $k^{\text{ième}}$ tirage "

$$V_k = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k.$$

FPC :

$$P(V_k) = P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) \times \dots \times P_{\overline{T_1}\cap\dots\cap\overline{T_{k-2}}}(\overline{T_{k-1}}) \times P_{\overline{T_1}\cap\dots\cap\overline{T_{k-1}}}(T_k)$$

$$\boxed{P(V_k) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \dots \times \frac{7-(k-2)}{12-(k-2)} \times \frac{5}{12-(k-1)}}$$