DM 11 - Corrigé
27/03/2026.

I - Partie 1.

1.0. $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1\, g_n - 0,2\, s_n \\ 0,4\, g_n + 0,5\, s_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}}$

1.1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $U_n = A^n U_0$.

1.2. $\det(P) = 2 - 1 = 1 \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

1.3. $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}}$

1.4. D est diagonale donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (0,9)^n & 0 \\ 0 & (0,7)^n \end{pmatrix}}$

1.5. $D = P^{-1} A P$

donc $PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = AP$

$PDP^{-1} = (AP)P^{-1} = A(PP^{-1}) = A$

donc $\underline{A = PDP^{-1}}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

• $\underline{n=0}$ $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$ ✓

• $\underline{n \geq 0 :}$ Sq $A^n = PD^nP^{-1}$ à un certain rang n.

$$A^{n+1} = A^n \times A \underset{(HR)}{=} (PD^nP^{-1})A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$$
$$= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$ ✓

récurrence achevée

1.6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2\times 0{,}9^n - 0{,}7^n & -0{,}9^n + 0{,}7^n \\ 2\times 0{,}9^n - 2\times 0{,}7^n & -0{,}9^n + 2\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$

et $U_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} g_n = (2\times 0{,}9^n - 0{,}7)^n \times 1000 + (-0{,}9^n + 0{,}7^n)\times 100. \\ b_n = (2\times 0{,}9^n - 2\times 0{,}7^n)\times 1000 + (-0{,}9^n + 2\times 0{,}7^n)\times 100 \end{cases}}$

$0<0{,}9<1$ et $0<0{,}7<1$ donc $0{,}9^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0{,}7^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = 0}$

→ les deux espèces vont finir par s'éteindre toutes les deux...

II_ Partie 2.

2.1. On note $J = A - I_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

$\det(J) = 0{,}03 \neq 0$ donc

$\boxed{J \text{ est inversible et } J^{-1} = \frac{1}{0{,}03}\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}}$

2.2. $C = J^{-1}B = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -50 & 20 \\ -40 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}}$

2.3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$V_{n+1} = U_{n+1} + C = AU_n + B + C$

or $C = J^{-1}B$
donc $JC = J(J^{-1}B)$
$= (JJ^{-1})B = B$.

donc $V_{n+1} = AU_n + JC + C$
$= AU_n + (J + I_2)C$ or $A = J + I_2$

donc $V_{n+1} = AU_n + AC$

$= A(U_n + C) = A V_n$ ✓

2.4. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $V_n = A^n V_0$.

2.5.

$$V_0 = U_0 + C = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 0{,}9^n - 0{,}7^n & -0{,}9^n + 0{,}7^n \\ 2\times 0{,}9^n - 2\times 0{,}7^n & -0{,}9^n + 2\times 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ -300 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = (2\times 0{,}9^n - 0{,}7^n)\times 500 - 300\times(-0{,}9^n + 0{,}7^n) \\ y_n = (2\times 0{,}9^n - 2\times 0{,}7^n)\times 500 - 300(-0{,}9^n + 2\times 0{,}7^n) \end{cases}$$

("de même" aurait suffit ...) et on retrouve $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = 0}$

2.6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + C$

donc $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}$

$x_n = g_n - 500$ et $y_n = s_n - 400$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n = x_n + 500$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = 500}$

$s_n = y_n + 400$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = 400}$

Avec 30 gardons de plus chaque année, on arrive à 500 gardons et 400 brochets...