Devoir Maison 12

À rendre mardi 14 avril 2026

Exercice 1.

Un magasin reçoit un lot de 1000 lampes. La probabilité qu'une lampe soit défectueuse est de 0,1%. Soit X le nombre de lampes défectueuses dans le lot.

1. Quelle loi suit X ?
2. Quelle est la probabilité que le lot ne contienne aucune lampe défectueuse ? Exactement une lampe défectueuse ? Au moins deux lampes défectueuses ?

Exercice 2.

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 7. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X(\Omega)$	-4	2	7	a
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Soit $Y = \dfrac{X-3}{2}$ une variable aléatoire. Déterminer la valeur de a pour que Y soit centrée.

Exercice 3.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$. On pose $Y = -2X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

1. Rappeler la loi de X et la valeur de son espérance.
2. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$, $E(X^k) = \dfrac{2^k + 6}{16}$
3. En déduire que $E(Y) = 1$.
4. Déterminer la loi de Y et vérifier le résultat de l'espérance obtenue à la question précédente.

Exercice 4.

Soit $n \geqslant 1$ fixé. On jette n fois et de manière indépendante une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1]$. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient pile, et qui vaut $n+1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(X=k) = 1$.
2. Calcul de l'espérance de X.

   Pour cela, on introduit la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, pour tout réel x.

   (a) Déterminer la dérivée de f.

   (b) Pour tout réel $x \neq 1$, calculer $f(x)$ et en déduire une autre expression de sa dérivée.

   (c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}$, en fonction de x et n ($x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

   (d) Calculer $E(X)$.