Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2025/2026
Mme MOREL

DS 7 – Mathématiques

Mercredi 1er avril 2026

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de deux problèmes de mathématiques.

PROBLÈME 1 : Étude d'une suite définie implicitement

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall\, t > 0\,,\ f(t) = t^2 - t\,\ln(t)$$

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Établir le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$
3. Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
4. Établir le tableau de variations de f^{-1} sur son ensemble de définition.

Partie 2 : Étude d'une suite définie implicitement

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
   On notera u_n cette solution.
2. Donner un minorant de (u_n). Que vaut $u_n^2 - u_n\,\ln(u_n)$ pour tout entier n non nul ?
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
5. (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \left(1 - \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = n$
   (b) En déduire que $u_n^2 \sim n$
   (c) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$

PROBLÈME 2 : stratégie de l'investisseur

Partie 1 : Étude préliminaire d'une matrice

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer D^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse .
3. Vérifier que $D = P^{-1}\,M\,P$. En déduire M^n, pour tout entier naturel n.
4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie 2 : Étude de la stratégie

Un investisseur surveille l'état d'une action chaque jour. L'action peut être dans trois états :

— **H** : L'action est en **Hausse** ;

— **S** : L'action est **Stagnante** ;

— **B** : L'action est en **Baisse**.

Le mouvement de l'action d'un jour n au jour $n+1$ suit les règles suivantes :

— Si l'action est en **Hausse**, elle a 1 chance sur 2 de le rester le lendemain, sinon elle stagne ou baisse de manière équiprobable.

— Si l'action est **Stagnante**, elle reste stagnante dans 50% des cas, sinon elle passe en Hausse avec une probabilité de 1/4.

— Si l'action est en **Baisse**, elle a 1 chance sur 2 de rester en baisse et 1 chance sur 4 de devenir stagnante.

On note : h_n (resp. b_n, s_n) la probabilité que l'action soit en hausse (resp. en baisse, resp. stagnante) le jour n . Et on suppose qu'au jour $n = 0$, l'action est stagnante.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} h_n \\ s_n \\ b_n \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n. X_n donne donc l'état du marché au jour n.

1. Donner h_0, s_0 et b_0.
2. Calculer l'état du marché au jour $n = 1$.
3. Pour tout entier n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n, s_n et b_n.
4. De même, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, déterminer s_{n+1} en fonction de h_n, s_n et b_n ; et b_{n+1} en fonction de h_n, s_n et b_n.
5. Pour tout entier naturel n, en déduire une relation entre X_{n+1} , M et X_n ; puis déterminer X_n en fonction de M^n et X_0.

Partie 3 : Questions

1. **Stabilité** : Déterminer l'état limite du marché quand $n \to +\infty$, c'est à dire la limite des coefficients de X_n quand n tend vers $+\infty$.
   Quel état limite reconnaissez-vous ?
2. **Interprétation** : L'investisseur a-t-il plus de chances de voir son action stagner ou baisser à long terme ? Qu'en pensez-vous ?