DS7 - Mathématiques.
1/04/2026
Corrigé

PROBLÈME 1

Partie 1. Étude de f

1. par C.C, $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t)=0$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0\in\mathbb{R}$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

2. f dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall t>0,\quad f'(t)=2t-\ln(t)-t\times\frac{1}{t}=2t-\ln(t)-1$

f' dérivable sur $]0,+\infty[$

$\forall t>0,\quad f''(t)=2-\frac{1}{t}=\frac{2t-1}{t}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	
$f'(t)$			$+$		
f	0		$\nearrow$		$+\infty$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1$
$=\ln(2)>0$
car $2>1$

en $+\infty$:

$f(t)=t^2\left(1-\frac{\ln(t)}{t}\right)$

par C.C, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$.

3. f ↗ sur $]0,+\infty[$ donc f est injective.

f est surjective de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[)=J$

f est continue sur $]0,+\infty[$ donc J est un intervalle et

$J=\left]\lim\limits_{0} f,\ \lim\limits_{+\infty} f\right[=]0,+\infty[$

Ccl : $\boxed{f \text{ est bijective de }]0,+\infty[\text{ dans }]0,+\infty[}$

(4.) f^{-1} est continue et $\nearrow$ sur $]0,+\infty[$ et $f^{-1} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
f^{-1}	0 $\nearrow$	$+\infty$

Partie 2. Étude d'une suite

(1.) f est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in]0,+\infty[$ donc $\exists! x>0 \,/\, f(x)=n$.

Notons u_n la solution.

(2.) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ donc 0 est un minorant de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$, soit $u_n^2 - u_n \ln(u_n) = n$

(3.) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$

donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$

or $f \nearrow$ sur $]0,+\infty[$ et $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$

donc $u_n \leq u_{n+1}$

Ccl : (u_n) est croissante

(4.) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_n \ln(u_n) = n$

donc $u_n^2\left(1 - \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = n$ $(u_n \neq 0)$

(b) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par C.C, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$

donc $\frac{n}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n^2 \sim n$

(c) $u_n^2 \sim n$ donc $\sqrt{u_n^2} \sim \sqrt{n}$

or $u_n > 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = |u_n| = u_n$

donc $u_n \sim \sqrt{n}$

$$PX=Y \iff \begin{cases} x = a-y-z = \left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)a + \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)b + \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)c = \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ y = -\frac{1}{2}\left(-a+b+2z\right) = -\frac{1}{2}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)a + \left(1+\frac{1}{3}\right)b + \frac{2}{3}c\right) = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

3. Calculs.
donc $D = P^{-1}MP$

PROBLÈME 2

Partie 1 - Étude d'une matrice

1. D est diagonale donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}}$

2. $\forall Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, on considère le système linéaire

$PX=Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

$$PX=Y \iff \begin{cases} x+y+z = a \\ x-y = b \\ x - z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+z = a \\ -2y-z = -a+b \\ -y-2z = -a+c \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} 1x+y+z = a \\ -2y-z = -a+b \\ -3z = -a-b+2c \end{cases}$$

$rg(P)=3$ donc P est inversible.

$$PX=Y \iff \begin{cases} x=a-y-z=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)a+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)b+\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ y=-\frac{1}{2}(-a+b+z)=-\frac{1}{2}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)a+\left(1+\frac{1}{3}\right)b+\frac{2}{3}c\right)=\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c \\ z=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}}$

3. Calculs.

donc $D=P^{-1}MP$

$PD=(PP^{-1})MP=MP$

$PDP^{-1}=M(PP^{-1})=M$ donc $M=PDP^{-1}$

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $M^n=PD^nP^{-1}$

* $n=0$ $M^0=I$ et $PD^0P^{-1}=PP^{-1}=I$ ✓

* $n\geq 0$ Sq $M^n=PD^nP^{-1}$ à un certain rang n.

$$M^{n+1}=M^n\times M \underset{(HR)}{=} PD^nP^{-1}M=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$$
$$=PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$=PD^{n+1}P^{-1} \quad \text{rec achevée}$$

4. calculs.

Partie 2 - Stratégie.

(1.) au jour $n=0$, l'action est stagnante

donc $\boxed{h_0=0\ ,\ s_0=1 \text{ et } b_0=0}$

(2.) On note les événements :

H_n = " l'action est en hausse le jour n "

B_n = " ______ baisse ______ "

S_n = " ______ stagne ______ "

H_0, B_0, S_0 forment un sce

FPT : $P(H_1) = P_{H_0}(H_1) \times P(H_0) + P_{B_0}(H_1) \times P(B_0) + P_{S_0}(H_1) \times P(S_0)$

$= 0 + 0 + 1 \times \frac{1}{4}$

$\boxed{h_1 = \frac{1}{4}}$

De même : $P(B_1) = 0 + 0 + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$P(S_1) = 0 + 0 + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

(3.) $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n, B_n, S_n forment un sce

FPT : $P(H_{n+1}) = P_{H_n}(H_{n+1}) \times P(H_n) + P_{S_n}(H_{n+1}) \times P(S_n) + P_{B_n}(H_{n+1}) \times P(B_n)$

$\boxed{h_{n+1} = \frac{1}{2} \times h_n + \frac{1}{4} \times s_n + \frac{1}{4} \times b_n}$

(4.) De même, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(S_{n+1}) = \frac{1}{4} \times h_n + \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{4} b_n$$

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} h_n + \frac{1}{4} s_n + \frac{1}{2} b_n$$

(5.) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} h_n + \frac{1}{4} s_n + \frac{1}{4} b_n \\ \frac{1}{4} h_n + \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{4} b_n \\ \frac{1}{4} h_n + \frac{1}{4} s_n + \frac{1}{2} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X_n$$

donc $X_{n+1} = M X_n$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$

Partie 3 - Questions

(1.)

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$

L'état limite du marché est donc un état d'équiprobabilité

(2.) Autant de chance de stagner que de baisser ou être en hausse à long terme !! Car le modèle n'est pas réaliste : si l'action est en baisse, elle ne remonte pas directement en général...