DM2 - Mathématiques.
Corrigé
14/04/2026

Exercice 1

1. 1000 expériences aléatoires indépendantes, chacune à 2 issues, dont le succès (lampe défectueuse) est de proba 0,1%

X compte le nombre de succès.

Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(1000, 0{,}1)}$

2. $\forall k \in [\![0, 1000]\!],\ P(X=k) = \binom{1000}{k} (0{,}1)^k (0{,}9)^{1000-k}$

et on cherche :

- $P(X=0) = \binom{1000}{0} (0{,}1)^0 (0{,}9)^{1000-0} = \underline{(0{,}9)^{1000}}$
- $P(X=1) = \binom{1000}{1} (0{,}1)^1 (0{,}9)^{1000-1} = 1000 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^{999}$

  $= \underline{100 \times (0{,}9)^{999}}$
- $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) \right)$

  $= \underline{1 - (0{,}9)^{1000} - 100 \times (0{,}9)^{999}}$

$\boxed{\text{Exercice 2.}}$

on veut $E(Y) = 0$

$$E(Y) = 0 \iff \frac{1}{3} E(X-3) = 0 \iff \frac{1}{3} E(X) - 1 = 0 \quad \text{(linéarité)}$$

$$\iff E(X) = 3.$$

or $E(X) = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{5} + \frac{a}{5} = \frac{7+a}{5}$

donc $E(Y) = 0 \iff \frac{7+a}{5} = 3 \iff a+7 = 15 \iff \underline{\underline{a = 8}} > 7$ ✓

$\boxed{\text{Exercice 3.}}$

1. loi de X : $\begin{array}{|l} X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \\ P(X=k) = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{2-k} \end{array}$

$E(X) = 2 \times \frac{1}{4}$ donc $\underline{\underline{E(X) = \frac{1}{2}}}$

2. Th du transfert : $\forall k \geq 1$,

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^{2} i^k P(X=i) = 0^k P(X=0) + 1^k P(X=1) + 2^k P(X=2)$$

$$= 1 \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} + 2^k \times \binom{2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 2^k \times \frac{1}{16} \times 1$$

$$\underline{E(X) = \frac{6+2^k}{16}} \quad ✓$$

3. Par linéarité :

$$E(Y) = -2E(X^3) + 6E(X^2) - 4E(X) + 1$$

$$= -2 \times \frac{6+2^3}{16} + 6 \times \frac{6+2^2}{16} - 4\,\frac{6+2^2}{16} + 1$$

$$= \frac{6(\underbrace{-2+6-4}_{=0}) - 2^4 + 3\times 2^3 - 2^3}{16} + 1 \quad \frac{2^4}{16}$$

$$= \frac{\cancel{-2^4} + 2^3(3-1) \cancel{+2^4}}{16} = \frac{2^4}{16} \quad \text{donc } \boxed{E(Y) = 1}$$

4. $Y(\Omega) = \{1\}$ car $Y = g(X)$ avec $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

et $g(0) = 1$

$g(1) = 1$

$g(2) = 1$

donc Y suit la loi certaine !

$Y(\Omega) = \{1\}$, $P(Y=1) = 1$ donc $E(Y) = 1$ ✓

Exercice 4

1. $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

Pour les événements : A_k = "on obtient Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer"

$(X = n+1) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$; événements indépendants

$P(X=n+1) = P(\bar{A}_1) \times \dots \times P(\bar{A}_n)$ donc $P(X=n+1) = (1-p)^n$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$(X=k) = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k$. donc : $P(X=k) = P(\bar{A}_1) \times \dots \times P(\bar{A}_{k-1}) \times P(A_k)$

$P(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n+1} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p + (1-p)^n \qquad \boxed{p \neq 0 \text{ donc } 1-p \neq 1}$$

$$= p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k + (1-p)^n$$

$$= p \, \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} + (1-p)^n = \cancel{p} \, \frac{(1-(1-p)^n)}{\cancel{p}} + (1-p)^n$$

$$= 1 \quad ✓$$

2.

(a) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}}$$

(b) $\forall x \neq 1, \quad f'(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\Big(\underbrace{-(n+1)x^n(1-x)}_{-(n+1)x^n + \underbrace{(n+1)x^{n+1}}_{nx^{n+1}+x^{n+1}}} + 1 - x^{n+1} \Big)$$

$$\boxed{\forall x \neq 1, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left(1-(n+1)x^n + n x^{n+1}\right)}$$

(c) les deux questions précédents entraînent : $\forall x \neq 1$

$$f'(x) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\left(1-(n+1)x^n + n x^{n+1}\right)}$$

(d)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} p + (n+1)(1-p)^n$$

$$= p\, f'(1-p) + (n+1)(1-p)^n$$

or $\boxed{p \neq 0 \text{ donc } 1-p \neq 1}$

donc :

$$f'(1-p) = \frac{1}{p^2}\left(1-(n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}\right)$$

Donc :

$$E(X) = \cancel{p} \times \frac{1}{p^{\cancel{2}}}\left(1-(n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}\right) + (n+1)(1-p)^n$$

$$E(X) = \frac{1}{p}\left(1 + n(1-p)^{n+1} \underbrace{- (n+1)(1-p)^n + p(n+1)(1-p)^n}_{(n+1)(1-p)^n(p-1)}\right)$$

$$= -(n+1)(1-p)^{n+1}$$

$$= -n(1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}\left(1-(1-p)^{n+1}\right)}$$