

EXERCICE I : BILAN THERMIQUE DU BASSIN D'UNE PISCINE

(D'après sujet ATS Physique 2024)

A. Courbe de refroidissement

1 - Par définition de la capacité thermique massique de l'eau c_e , la capacité thermique C d'une masse m d'eau s'écrit : $C = m \cdot c_e$

Or ici, le bassin contient un volume V d'eau de masse volumique ρ telle que $m = \rho \cdot V$

Soit : $C = \rho \cdot V \cdot c_e$

AN : $C = 1,0 \cdot 10^3 \times 500 \times 4,2 \cdot 10^3 \Rightarrow C = 2,1 \cdot 10^9 J \cdot K^{-1} = 2,1 MJ \cdot K^{-1}$

2 - Soit le système {eau du bassin} de capacité thermique C .

D'après le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système fermé subissant une transformation infinitésimale : $dU + dE_m = \delta W + \delta Q$ avec :

dU : variation élémentaire d'énergie interne, telle que $dU = C \cdot dT$ pour ce système en phase condensée indilatable incompressible ;

dE_m : variation élémentaire d'énergie mécanique macroscopique, telle que $dE_m = 0$ pour ce système macroscopiquement au repos ;

δW : travail élémentaire algébriquement reçu par le système au cours de la transformation, ici, seules les forces pressantes s'exercent, et $\delta W = \delta W_{pressantes} = 0$ car le système condensé subi une transformation isochore ;

δQ : énergie thermique élémentaire algébriquement reçue par le système au cours de la transformation. Or, δQ est reliée au flux thermique algébriquement reçu par l'eau $\phi_{reçu}$ et à la durée dt par la relation $\delta Q = \phi_{reçu} \cdot dt$ avec $\phi_{reçu} = \frac{T_0 - T(t)}{R}$ où R est la résistance thermique qui modélise les échanges thermiques entre l'air et l'eau de la piscine. On a donc :

$$\delta Q = \frac{T_0 - T(t)}{R} \times dt$$

Le bilan devient finalement : $C \cdot dT = - \frac{T(t) - T_0}{R} \cdot dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} = - \frac{T(t) - T_0}{R \cdot C}$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{R \cdot C} = \frac{T_0}{R \cdot C}$$

On retrouve une équation différentielle de la forme de celle de l'énoncé avec : $\tau = R \cdot C$

3. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre. La solution est de la forme : $T(t) = T_{eh}(t) + T_p(t)$

avec : # $T_{eh}(t)$ la solution de l'équation homogène telle que $T_{eh}(t) = A \cdot \exp(-t/\tau)$ avec A une constante à déterminer ;

$T_p(t)$ une solution particulière de l'équation complète, de la même forme que le second membre donc ici, constante : $T_p(t) = T_0$

Finalement : $T(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) + T_0$

On détermine A grâce à la condition initiale :

D'après l'énoncé : $T(t=0) = T_i$ et d'après l'expression établie : $T(t=0) = A + T_0$. Par identification de ces deux expressions : $T_i = A + T_0 \Rightarrow A = T_i - T_0$

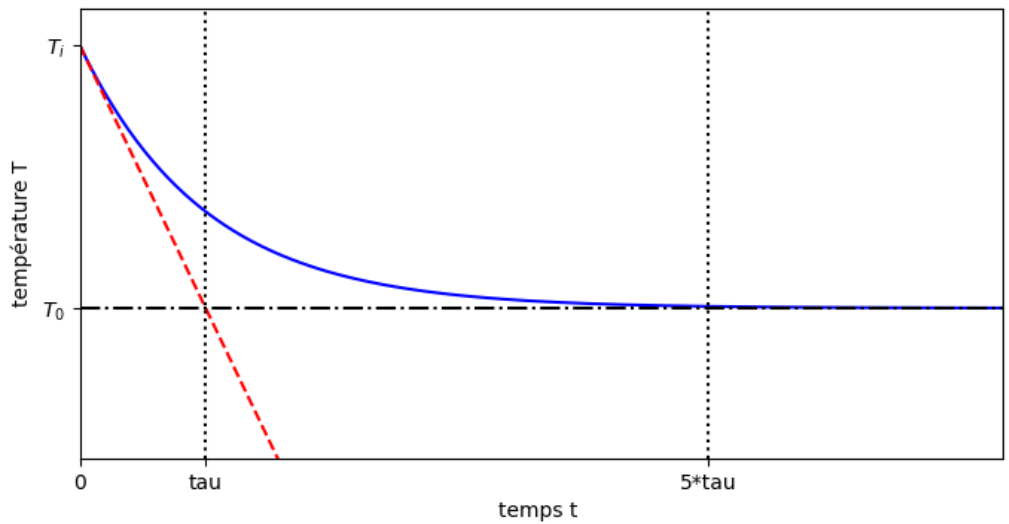
La solution de l'équation différentielle est : $T(t) = (T_i - T_0) \cdot \exp(-t/\tau) + T_0$

- 4 - On détermine la température finale atteinte par l'eau du bassin :

$$\exp(-t/\tau) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

alors $T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_F = T_0$

Allure du graphique de $T(t)$ en supposant $T_i > T_0$:



- 5 - D'après la question 2- : $T(t) = (T_i - T_0) \cdot \exp(-t/\tau) + T_0$

Pour $t \ll \tau$, c'est-à-dire $\frac{t}{\tau} \ll 1$, alors d'après le rappel de l'énoncé : $\exp(-t/\tau) \approx 1 - t/\tau$

La solution de l'équation devient :

$$T(t) = (T_i - T_0) \cdot (1 - \frac{t}{\tau}) + T_0 = T_i - T_0 - \frac{(T_i - T_0) \cdot t}{\tau} + T_0 = T_i - \frac{(T_i - T_0) \cdot t}{\tau}$$

Soit finalement : $T(t) = \frac{T_0 - T_i}{\tau} \cdot t + T_i$

On obtient bien : $T(t) = a \cdot t + b$ avec $a = \frac{T_0 - T_i}{\tau}$ et $b = T_i$

- 6 - • La formule de $T(t)$ établie précédemment est valable de nuit, donc sur le document 2, pour t compris entre 0 s et 500 min environ.

Sur cette période, la courbe $T = f(t)$ s'apparente à une droite d'équation $T_{\text{exp}}(t) = a \cdot t + b$

On peut déterminer le coefficient directeur de cette droite en considérant deux points éloignés de celle-ci :

$$a = \frac{T(t = 500s) - T(t = 0s)}{500 - 0} = \frac{27,5 - 29,6}{500} = -\frac{2,1}{500} = -4,2 \cdot 10^{-3} K \cdot \text{min}^{-1}$$

• D'après l'expression théorique approximée précédemment, le coefficient directeur théorique de cette portion de droite est : $a = \frac{T_0 - T_i}{\tau}$. On en déduit donc que : $\tau = \frac{T_0 - T_i}{a}$.

• Or, d'après le document 2, la température initiale est $T_i = T(t = 0) \approx 29,6^\circ\text{C}$.

On estime la température extérieure d'après le document 3, en évaluant une valeur moyenne au cours de la nuit : $T_0 \approx 16,3^\circ\text{C}$

AN : $\tau = \frac{16,3 - 29,6}{-4,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \tau = 3,2 \cdot 10^3 \text{ min}$

AUTRE MÉTHODE :

D'après l'expression établie à la question 5-, on isole l'expression de τ : $\tau = \frac{(T_0 - T_i) \times t}{T(t) - T_i}$

Or, la formule de $T(t)$ établie précédemment est valable de nuit, donc pour t compris entre 0 s et 500 min environ. On relève donc :

sur le document 2 : - la température du bassin $T(t)$ pour $t = 500 \text{ min}$: $T(t=500\text{min}) = 27,5^\circ\text{C}$;
- la température initiale T_i : $T_i = 29,6^\circ\text{C}$;

sur le document 3, la température de l'air, supposée constante selon l'énoncé, que l'on approxime graphiquement en évaluant sa moyenne au cours de la nuit à : $T_0 = 16,3 \text{ }^\circ\text{C}$.

$$\underline{A.N.} : \tau = \frac{(16,3 - 29,6) \times 500}{27,5 - 29,6} \quad \tau = 3,2 \cdot 10^3 \text{ min}$$

B. Causes de refroidissement

7 - On considère le système fermé {eau de la piscine} subissant une variation de température de T_i à T_f .

S'agissant d'une phase condensée supposée incompressible et indilatable, de capacité thermique constante, on peut écrire : $\Delta H_1 = C \cdot \Delta T = C \cdot (T_f - T_i)$ soit $\Delta H_1 = C \cdot (T_f - T_i)$

$$\underline{A.N.} : \Delta H_1 = 2,1 \cdot 10^9 \times (27,5 - 29,6) \Rightarrow \Delta H_1 = -4,4 \cdot 10^9 \text{ J} = -4,4 \text{ MJ}$$

B.1 Refroidissement par évaporation

8 - Le débit volumique étant constant, le volume d'eau V_e évaporé pendant la durée Δt s'écrit :

$$V_e = D_v \cdot \Delta t \quad \text{soit} \quad V_e = D_v \cdot (t_f - t_i)$$

La masse d'eau évaporée correspondante s'écrit : $m_e = \rho \cdot V_e$ soit $m_e = \rho \cdot D_v \cdot (t_f - t_i)$

9 - On considère le système fermé {masse m_e d'eau de la piscine} qui subit une évaporation au cours de la transformation étudiée.

L'expression de la variation d'enthalpie, ΔH_2 , associée à l'évaporation durant cette période s'écrit : $\Delta H_2 = m_e \cdot \Delta_{vap} h$ soit $\Delta H_2 = \rho \cdot D_v \cdot (t_f - t_i) \cdot \Delta_{vap} h$

$$\underline{A.N.} : \Delta H_2 = 1,0 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^{-3} \times (500 - 0) \times 2,3 \cdot 10^6 \Rightarrow \Delta H_2 = 2,3 \cdot 10^9 \text{ J} = 2,3 \text{ MJ}$$

11 - L'évaporation est une transformation endothermique qui consomme de l'énergie. Cette énergie étant prélevée au reste de l'eau liquide présente dans le bassin, la température de celle-ci diminue.

B.2 Refroidissement par échange avec l'air

12 - La température de l'eau étant supérieure à celle extérieure, et la puissance thermique étant réellement orientée de la zone de plus haute température vers celle de plus basse température, alors la puissance thermique est réellement cédée par l'eau à l'air : alors $P_{air} > 0$.

Dans l'expression théorique de l'énoncé, $h > 0$, $S > 0$ et $T - T_{air} > 0$. Il faut donc : $\varepsilon = +1$.

13 - Par définition, $P_{air} = \frac{\delta Q_{air}}{dt}$, soit $\delta Q_{air} = P_{air} \cdot dt$

Alors le transfert cherché s'écrit : $Q_{air} = \int_{t_i}^{t_f} \delta Q_{air} = \int_{t_i}^{t_f} P_{air} \cdot dt$

Remarque : Attention, a priori P_{air} n'est pas constante, on ne peut pas intégrer cette relation trop rapidement ... !

14 - D'après la question 10-, $P_{air} = h \cdot S \cdot (T - T_{air})$.

D'après les docs 2 et 3, on relève l'écart de température entre l'eau et l'air à différents instants

| | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|
| $t(\text{en min})$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
| $T(t) - T_{air}(t)(\text{en } ^\circ\text{C})$ | 12,2 | 12,5 | 12,3 | 12,2 | 11,8 | 12,0 |

On constate que l'écart varie peu, on peut estimer : $T - T_{air} \approx \text{cste} \approx 12,2 \text{ K}$

Et donc : $P_{air} = h \cdot S \cdot (T - T_{air}) \approx \text{cste}$

Finalement : $Q_{air} = P_{air} \cdot \int_{t_i}^{t_f} dt = P_{air} \cdot (t_f - t_i)$ soit $Q_{air} \approx h \cdot S \cdot (T - T_{air}) \cdot (t_f - t_i)$

$$\underline{A.N.} : Q_{air} \approx 5 \times 300 \times 12,2 \times (500 - 0) \times 60 \Rightarrow Q_{air} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ J} \approx 0,5 \text{ MJ}$$

AUTRE MÉTHODE :

Hypothèse : la température de l'air est supposée constante : $T_{air} = T_0 = 16,3 \text{ }^\circ\text{C}$

$$Q_{air} = \int_{t_i}^{t_f} P_{air}(t) \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} h \cdot S \cdot ((T_i - T_0) \cdot \exp(-t/\tau) + T_0 - T_0) \cdot dt = h \cdot S \cdot (T_i - T_0) \int_{t_i}^{t_f} \exp(-t/\tau) \cdot dt$$
$$\Leftrightarrow Q_{air} = h \cdot S \cdot (T_i - T_0) \cdot (-\tau) [\exp(-t/\tau)]_{t_i}^{t_f} = h \cdot S \cdot (T_i - T_0) \cdot (-\tau) [\exp(-t_f/\tau) - \exp(-t_i/\tau)]$$

A.N : $Q_{air} = 5 \cdot 300 \cdot (29,6 - 16,3) \cdot (-3,1 \cdot 10^3) (\exp(-500/(3,1 \cdot 10^3)) - 1) \cdot 60$ soit $Q_{air} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ J}$

B.3. Refroidissement par rayonnement

15 - **Plusieurs niveaux d'approximation sont envisageables pour répondre à cette question dont certains sont présentés ci-dessous :**

■ Approximation forte : on suppose les flux surfaciques CONSTANTS durant la nuit

D'après le doc 4, les puissances surfaciques varient très peu pendant la nuit. On estime donc graphiquement la valeur moyenne de :

la puissance thermique surfacique reçue par l'eau de la part de l'atmosphère : $\varphi_a = 470 \text{ W} \cdot \text{m}^2$

la puissance thermique surfacique cédée par l'eau vers l'atmosphère : $\varphi_b = 320 \text{ W} \cdot \text{m}^2$.

Par définition de la puissance : $P = \frac{\delta Q}{dt}$

D'où l'énergie élémentaire transférée à travers la surface S : $\delta Q = P \cdot dt = \varphi \cdot S \cdot dt$

Puis, en supposant le flux surfacique constant, l'énergie thermique : $Q = \varphi \cdot S \cdot \Delta t$

Finalement : $Q_{IR} = |Q_b| - |Q_a| = \varphi_b \cdot S \cdot \Delta t - \varphi_a \cdot S \cdot \Delta t$ soit $Q_{IR} = (\varphi_b - \varphi_a) \cdot S \cdot \Delta t$

A.N : $Q_{IR} = (470 - 320) \times 300 \times 500 \times 60 \Rightarrow Q_{IR} \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ J} \approx 1,4 \text{ MJ}$

■ Approximation plus fine : on suppose que les flux surfaciques DIMINUENT LINEAIREMENT durant la nuit

Le doc 4 donne les puissances thermiques surfaciques liées aux rayonnements infrarouges φ_i . On peut déterminer les transferts thermiques élémentaires liés à ces rayonnements δQ_i :

$$\delta Q_i = \varphi_i \cdot S \cdot dt$$

Or, on peut approximer chaque courbe $\varphi_i = f(t)$ du doc 4 par une droite décroissante d'équation : $\varphi_i = a_i \cdot t + b_i$ en notant a_i le coefficient directeur de la droite i et b_i l'ordonnée à l'origine de la droite i .

$$\text{Alors : } Q_i = \int_{t_i}^{t_f} \delta Q_i = \int_{t_i}^{t_f} \varphi_i \cdot S \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} (a_i \cdot t + b_i) \cdot S \cdot dt$$

$$\text{C'est-à-dire : } Q_i = S \cdot \left[\frac{a_i \cdot t^2}{2} + b_i \cdot t \right]_{t_i}^{t_f} = S \cdot \left(\frac{a_i}{2} (t_f^2 - t_i^2) + b_i (t_f - t_i) \right)$$

On peut en déduire la valeur du transfert thermique par rayonnement :

$$Q_{IR} = Q_b - Q_a = S \cdot \left(\frac{a_b}{2} (t_f^2 - t_i^2) + b_b (t_f - t_i) \right) - \frac{a_a}{2} (t_f^2 - t_i^2) - b_a (t_f - t_i)$$

Déterminons expérimentalement les équations des deux droites modèles :

Pour la courbe (a) : $a_a \approx \frac{315 - 325}{500} \approx -2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ et $b_a \approx 325 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Pour la courbe (b) : $a_b \approx \frac{465 - 475}{500} \approx -2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{min}^{-1} \approx a_a$ et $b_b \approx 475 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Finalement, comme $a_b \approx a_a$, on a : $Q_{IR} \approx S \cdot (b_b - b_a) \cdot (t_f - t_i)$

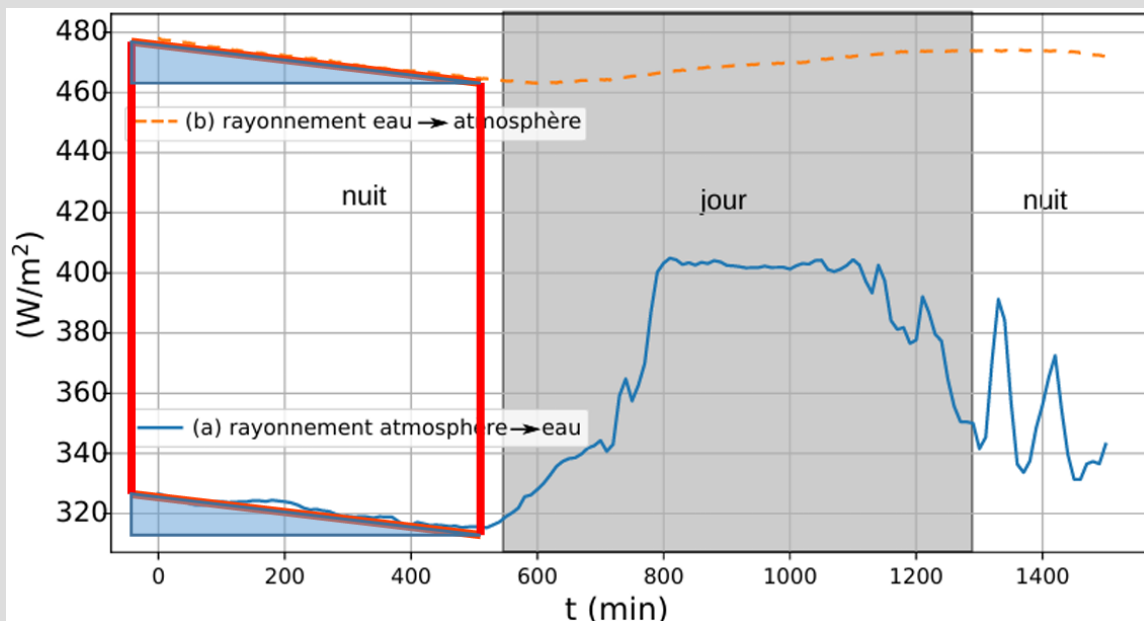
AN : $Q_{IR} \approx 300 \times (475 - 325) \times (500 - 0) \times 60 \Rightarrow Q_{IR} \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ J} \approx 1,4 \text{ MJ}$

Autre méthode de calcul avec cette même approximation :

On cherche $Q_{IR} = Q_b - Q_a$ avec :

$$\# Q_a = \int_{t_i}^{t_f} \delta Q_a = \int_{t_i}^{t_f} \varphi_a \cdot S \cdot dt = S \cdot \int_{t_i}^{t_f} \varphi_a \cdot dt \quad \text{où } \int_{t_i}^{t_f} \varphi_a \cdot dt \text{ est l'aire sous la courbe } \varphi_a(t)$$

$$\# Q_b = \int_{t_i}^{t_f} \delta Q_b = \int_{t_i}^{t_f} \varphi_b \cdot S \cdot dt = S \cdot \int_{t_i}^{t_f} \varphi_b \cdot dt \quad \text{où } \int_{t_i}^{t_f} \varphi_b \cdot dt \text{ est l'aire sous la courbe } \varphi_b(t)$$



Document 4 : puissances thermiques surfaciques liées au rayonnement infrarouge, en watt par mètre carré de surface de bassin.

Alors $Q_{IR} = S \cdot (A_b - A_a)$ en notant A_a l'aire sous la courbe a et A_b l'aire sous la courbe b . $A_b - A_a$ correspond à l'aire du parallélogramme rouge, qui est aussi égale à l'aire du rectangle de largeur $465 - 315 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et de longueur 500 min

$$\text{Ainsi, } Q_{IR} = 300 \times (465 - 315) \times 500 \times 60 = 1,4 \text{ MJ}$$

B.4 Bilan

- 16 - ■ On considère le système fermé {eau initialement présente dans la piscine}.
- Ce système évolue à pression atmosphérique constante et subit donc une transformation monobare.
 - D'après le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système fermé subissant cette transformation monobare entre t_i et t_f , deux états pour lesquels le système est en équilibre mécanique : $\Delta H + \Delta E_m = Q + W'$ avec :

* ΔH : variation d'enthalpie du système, constitué de deux sous-systèmes :

- une masse d'eau qui reste liquide et subit une variation de température, dont la variation d'enthalpie $\Delta H_1'$ **peut s'identifier à ΔH_1** (en négligeant l'influence de la masse évaporée sur la capacité thermique totale du système)
- une masse d'eau qui s'évapore, dont la variation d'enthalpie est ΔH_2 .

$$\text{L'enthalpie étant extensive, } \Delta H = \Delta H_1' + \Delta H_2 \approx \Delta H_1 + \Delta H_2$$

* ΔE_m : variation d'énergie mécanique macroscopique du système.

Le système est supposé macroscopiquement au repos : $\Delta E_m = 0$.

* Q : énergie thermique algébriquement reçue par le système au cours de la transformation :

$$Q = -Q_{air} - Q_{IR}$$

(les signes « - » sont dus au fait que les transferts définis dans l'énoncé correspondent à des transferts CEDES par le système alors que Q correspond à un transfert RECU par le système).

★ W' : travail algébriquement reçu par le système au cours de la transformation autre que celui des forces pressantes : $W' = 0$ car le système ne reçoit aucun travail autre que celui des forces pressantes.

■ Le bilan s'écrit donc : $\Delta H_1 + \Delta H_2 \approx -Q_{air} - Q_{IR}$

17 - Vérifions la compatibilité des valeurs numériques obtenues précédemment avec l'expression littérale obtenue précédemment :

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 \approx -4,4 + 2,3 = -2,1 \text{ MJ}$$

$$-Q_{air} - Q_{IR} \approx -0,5 - 1,4 = -1,9 \text{ MJ}$$

Compte tenu des approximations de calculs réalisées, la relation est bien vérifiée numériquement par les calculs réalisés.

18 - Du point de vue du système {eau restant dans la piscine} ; le terme de pertes dominant numériquement est ΔH_2 , c'est-à-dire le terme de pertes lié à l'évaporation. Afin de diminuer sa contribution, l'utilisation d'une bâche de protection sur le bassin semble appropriée.

EXERCICE II : UN PETIT RAFRAICHISSEMENT ?

19 - ■ Considérons le système {verre + jus d'orange + glaçons}. On notera m la masse de glaçons cherchée, à ajouter.

■ Caractérisons l'état initial :

→ Hypothèse 1 : on assimile le jus d'orange à de l'eau, de capacité thermique massique $c_e = 4,2 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ainsi, la capacité thermique du jus s'écrit : $C_{jus} = m_{jus} \cdot c_e = \rho_{eau\text{liquide}} \cdot V \cdot c_e$
(avec $V = 20 \text{ cL}$ le volume de jus versé)

→ Hypothèse 2 : Initialement, le verre et le jus de fruit sont supposés à température ambiante : $T_1 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$.

→ Hypothèse 3 : initialement, les glaçons sont tirés d'un saut à glace dans lequel eau et glaçons sont en équilibre, on suppose donc la température initiale de la glace : $T_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$

■ On s'intéresse à la transformation :



Cette transformation se déroule à pression ambiante, on la considère monobare.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à ce système fermé subissant cette transformation monobare entre deux états d'équilibre mécanique : $\Delta H + \Delta E_m = Q + W'$ avec :

★ ΔH : variation d'enthalpie du système : l'enthalpie étant extensive :

$$\Delta H = \Delta H_{verre} + \Delta H_{jus} + \Delta H_{glace}$$

○ {le verre}, phase condensée, subit une variation de température : $\Delta H_{verre} = C_{verre} \cdot (T_f - T_1)$

→ Hypothèse 4 : On néglige la capacité thermique du verre : $\Delta H_{verre} = 0$

○ {le jus}, phase condensée assimilée à une masse d'eau de capacité thermique constante, subit une variation de température : $\Delta H_{jus} = C_{jus} \cdot (T_f - T_1) = \rho_{eau\ liquide} \cdot V \cdot c_e \cdot (T_f - T_1)$

○ {les glaçons} subissent une fusion et un changement de température.

On introduit un état intermédiaire fictif tel que les glaçons sont complètement fondus mais encore à la température $T_2 = 0\text{ °C}$. L'enthalpie est une fonction d'état, ainsi :

$$\Delta H_{glace, EI \rightarrow EF} = \Delta H_{glace, EI \rightarrow \text{état intermédiaire}} + \Delta H_{glace, \text{état intermédiaire} \rightarrow EF}$$

Entre l'état initial et l'état intermédiaire, la masse m de glace est supposée fondre de manière isotherme réversible :

$$\Delta H_{glace, EI \rightarrow \text{état intermédiaire}} = m \cdot \Delta_{fus} h$$

Entre l'état intermédiaire et l'état final, la masse m de glace fondue, désormais liquide (= phase condensée) subit une variation de température :

$$\Delta H_{glace, \text{état intermédiaire} \rightarrow EF} = m \cdot c_e \cdot (T_f - T_2)$$

★ ΔE_m : variation d'énergie mécanique macroscopique du système.

Le système est supposé macroscopiquement au repos : $\Delta E_m = 0$

★ Q : énergie thermique algébriquement reçue par le système au cours de la transformation :

→ Hypothèse 5 : On néglige les échanges thermiques avec l'extérieur : $Q = 0$

★ W' : travail algébriquement reçu par le système au cours de la transformation autre que celui des forces pressantes : $W' = 0$ car le système ne reçoit aucun travail autre que celui des forces pressantes.

■ Le bilan s'écrit finalement :

$$\rho_{eau\ liquide} \cdot V \cdot c_e \cdot (T_f - T_1) + m \cdot \Delta_{fus} h + m \cdot c_e \cdot (T_f - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow m \cdot (\Delta_{fus} h + c_e \cdot (T_f - T_2)) = -\rho_{eau\ liquide} \cdot V \cdot c_e \cdot (T_f - T_1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{\rho_{eau\ liquide} \cdot V \cdot c_e \cdot (T_1 - T_f)}{\Delta_{fus} h + c_e \cdot (T_f - T_2)}$$

$$\underline{AN} : m = \frac{1000 \times 20 \cdot 10^{-2} \times 4,2 \cdot 10^3 \times (35 - 20)}{334 \cdot 10^3 + 4,2 \cdot 10^3 \times (20 - 0)} = \frac{0,84 \times 15}{334 + 84}$$

soit $m = 30\text{ g}$ de glaçons