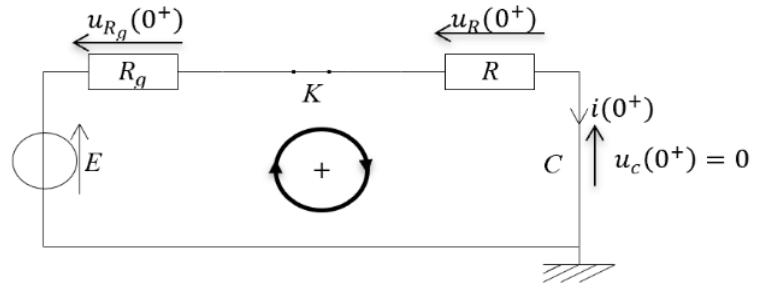


EXERCICE 1 : Etude expérimentale du condensateur

1. • D'après l'énoncé, initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$.
Or, la tension aux bornes du condensateur est toujours continue donc : $u_c(0^+) = u_c(0^-)$

Finalement : $u_c(0^+) = 0$.

• A la fermeture de l'interrupteur, le circuit équivalent est donc le suivant, dans lequel le condensateur de tension nulle à ses bornes se comporte comme un fil :



D'après la loi des mailles :

$$\text{à } t = 0^+, E - u_{R_g}(0^+) - u_R(0^+) - u_C(0^+) = 0$$

D'après la loi d'Ohm appliquée aux deux conducteurs ohmiques en convention récepteur :

$$u_{R_g}(0^+) = R_g \cdot i(0^+) \quad \text{et} \quad u_R(0^+) = R \cdot i(0^+)$$

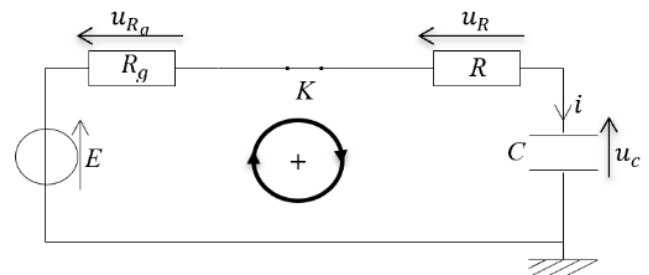
$$\text{D'où : } E - R_g \cdot i(0^+) - R \cdot i(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad i(0^+) = \frac{E}{R_g + R}$$

2. On s'intéresse désormais au circuit à $t \geq 0$:

D'après la loi des mailles : $E - u_{R_g} - u_R - u_C = 0$

D'après la loi d'Ohm appliquée aux deux conducteurs ohmiques en convention récepteur :

$$u_{R_g} = R_g \cdot i \quad \text{et} \quad u_R = R \cdot i$$



D'après la relation tension-intensité aux bornes condensateur en convention récepteur : $i = C \frac{du_C}{dt}$

Finalement, en réinjectant les caractéristiques des dipôles dans la loi des mailles, on obtient :

$$E - R_g \cdot C \frac{du_C}{dt} - R \cdot C \frac{du_C}{dt} - u_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{(R_g + R) \cdot C} = \frac{E}{(R_g + R) \cdot C}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$: une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre non nul.

3. La constante de temps τ du circuit est l'inverse du coefficient qui multiplie u_C dans la forme canonique de l'équation différentielle. On a donc : $\tau = (R_g + R) \cdot C$.

On peut vérifier l'homogénéité de cette expression par analyse dimensionnelle. L'équation différentielle établie précédemment étant homogène, on peut donc écrire :

$$\frac{[du_C]}{[dt]} = \frac{[u_C]}{[(R_g + R) \cdot C]} \Rightarrow \frac{[u_C]}{T} = \frac{[u_C]}{[(R_g + R) \cdot C]} \Rightarrow [(R_g + R) \cdot C] = T$$

On peut donc bien poser : $\tau = (R_g + R) \cdot C$ la constante de temps du circuit

Interprétation physique : τ représente le temps caractéristique d'évolution du système. A $t = \tau$, le système a accompli 63 % de son évolution ; au bout de 5τ , le régime permanent est pratiquement atteint.

4. L'équation différentielle obtenue à la question 2- s'écrit donc : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit : $u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}$ avec :

$u_{C,h}(t) = A \cdot \exp(-t/\tau)$, solution de l'équation homogène (A est une constante à déterminer) ;

$u_{C,p}$ une solution particulière de l'équation complète, est choisie de la même forme que le second membre,

donc constante. En régime permanent, $\frac{du_{C,p}}{dt} = 0$, d'où $\underline{u_{C,p} = E}$

On en déduit donc que $u_C(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) + E$

On détermine A grâce à la condition initiale établie à la question 1- : $\underline{u_C(0^+) = 0}$

D'après la relation ci-avant : pour $t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0 = A + E \Rightarrow \underline{A = -E}$

Finalement : $\boxed{u_C(t) = E \cdot (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ pour } t \geq 0}$

5. Le condensateur sera entièrement chargé quand le régime permanent sera atteint, c'est-à-dire aux temps longs. Or, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = E$. La tension aux bornes du condensateur entièrement chargé vaut donc E .

Or, à la date t_1 , le condensateur est chargé à 90 %. On a donc $u_C(t_1) = 0,90 \cdot E$

Soit : $E \cdot (1 - \exp(-t_1/\tau)) = 0,90 \cdot E$

$\Leftrightarrow 1 - \exp(-t_1/\tau) = 0,90$

$\Leftrightarrow \exp(-t_1/\tau) = 0,10$

$\Leftrightarrow -t_1/\tau = \ln(0,10)$

$\Leftrightarrow \boxed{t_1 = -\tau \cdot \ln(0,10) = \tau \cdot \ln(10) = 2,3 \cdot \tau}$

6. Les branchements de la voie B permettent d'observer la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. Or, cette tension est une grandeur continue, ce qui justifie son attribution à la courbe (1) continue.

Les branchements de la voie A permettent d'observer la tension aux bornes de l'association série du condensateur et de la résistance R (soit la tension $u_C(t) + u_R(t)$), elle-même égale à la tension aux bornes du générateur réel (soit la tension $E - u_{R_g}(t)$) qui se révèle être la courbe (2) discontinue.

7. D'après l'oscillogramme et la réponse à la question précédente, la tension u_P au point P correspond à la tension $E - u_{R_g}$ au début de la charge du condensateur, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Or, d'après la question 1-, à $t = 0^+$, $u_{R_g}(0^+) = R_g \cdot i(0^+)$ et $i(0^+) = \frac{E}{R_g + R}$

Soit $u_P = E - \frac{R_g \cdot E}{R_g + R}$ donc : $\boxed{u_P = \frac{R}{R_g + R} \times E}$

Autre réponse possible :

La tension u_P au point P correspond à la tension $u_C + u_R$ au début de la charge du condensateur, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Or, d'après la question 1-, à $t = 0^+$: $u_C(0^+) = 0$, $u_R(0^+) = R \cdot i(0^+)$, et $i(0^+) = \frac{E}{R_g + R}$

Soit $u_P = 0 + R \cdot \frac{E}{R_g + R}$ donc : $\boxed{u_P = \frac{R}{R_g + R} \times E}$

8. • Détermination de la valeur de E :

On sait qu'à $t = 0^-$ et à $t = 0^+$, la tension aux bornes du condensateur est nulle. Autrement dit, l'origine de l'axe des temps (abscisses) et l'origine de l'axe des tensions (ordonnées) est le point de la courbe (1) représenté sur l'oscillogramme ci-contre.

Or, lorsque le condensateur est chargé : $u_c \rightarrow E$

$$E = \text{nombre de divisions} \times \text{Sensibilité verticale}$$

$$\Rightarrow E = 6,0 \times 1,0 \quad \text{soit } \underline{E = 6,0 \text{ V}}$$

• **Détermination de la valeur de u_P** : Au point P,

$$u_P = \text{nombre de divisions} \times \text{Sensibilité verticale}$$

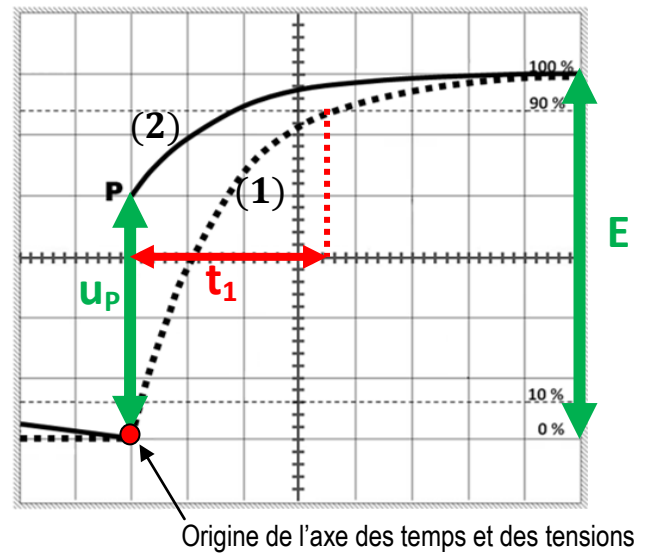
$$\Rightarrow u_P = 4,0 \times 1,0 \quad \text{soit } \underline{u_P = 4,0 \text{ V}}$$

• **Détermination de la valeur de R_g** :

D'après l'expression établie à la question 7- :

$$R_g + R = R \cdot \frac{E}{u_P} \Rightarrow \underline{R_g = R \times \left(\frac{E}{u_P} - 1 \right)}$$

$$\underline{AN} \rightarrow R_g = 100 \cdot \left(\frac{6,0}{4,0} - 1 \right) = 100 \cdot \left(\frac{3,0}{2,0} - 1 \right) = 100 \times \frac{1}{2} \quad \text{soit } \underline{R_g = 50 \Omega}$$



9. A la question 5, on a établi $t_1 = 2,3 \cdot \tau$ avec $\tau = (R_g + R) \cdot C$, tel que $u_c(t_1) = 0,90 \cdot E$

$$\text{On déduit alors : } C = \frac{t_1}{2,3 \cdot (R_g + R)}$$

Pour calculer C, il faut donc d'abord déterminer la valeur de la date t_1 sur l'oscillogramme : celle-ci se lit à l'abscisse du point d'intersection de la courbe (1) avec la courbe indiquant 90 % de la charge :

$$\underline{t_1 = \text{nombre de divisions} \times \text{Sensibilité horizontale}} \Rightarrow t_1 = 3,5 \times 0,10 \quad \text{soit } \underline{t_1 = 0,35 \text{ ms}}$$

$$\underline{AN} \rightarrow C = \frac{0,35 \cdot 10^{-3}}{2,3 \cdot (100 + 50)} = \frac{0,35 \cdot 10^{-3}}{2,3 \cdot 150} = \frac{0,35 \cdot 10^{-3}}{(2 + 0,3) \cdot 150} = \frac{0,35 \cdot 10^{-3}}{300 + 45} \approx \frac{3,5 \cdot 10^{-4}}{3,5 \cdot 10^2} \quad \text{Soit } \underline{C = 1,0 \mu\text{F}}$$

10. Afin d'observer une charge complète du condensateur, il faut que la tension aux bornes du générateur reste égale à E jusqu'à ce que le régime permanent soit atteint. Or, la tension aux bornes du générateur étant une tension créneau, elle n'est égale à E que pendant une demi-période $T/2$. Il faut donc que :

$$\frac{T}{2} \geq 5 \cdot \tau \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cdot f} \geq 5 \cdot (R_g + R) \cdot C \Leftrightarrow 2 \cdot f \leq \frac{1}{5 \cdot (R_g + R) \cdot C} \Leftrightarrow \underline{f \leq \frac{1}{10 \cdot (R_g + R) \cdot C}}$$

$$\underline{AN} \rightarrow f \leq \frac{1}{10 \cdot (50 + 100) \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot 10^{-3}} = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \quad \text{soit } \underline{f \leq 6,7 \cdot 10^2 \text{ Hz}}$$

11. Pour observer l'allure de l'intensité parcourant le circuit à l'oscilloscope, il faut observer la tension aux bornes d'un conducteur ohmique, qui est proportionnelle à l'intensité qui le traverse, d'après la loi d'Ohm.

Or, ce circuit contenant un générateur, il faut d'abord s'assurer que le conducteur ohmique a une borne commune avec le générateur pour assurer l'unicité du point de potentiel nul dans le circuit. On peut par exemple échanger les positions du conducteur ohmique de résistance R et du condensateur C .

EXERCICE 2 : En direction du centre ville

1. Système = {RER assimilé à un point matériel M} ;

Référentiel terrestre muni d'un repère cartésien (O, \vec{u}_x)

• Par définition : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ (le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position)

$$\# \text{ Pour } t \in [0, t_A] : v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = \frac{v_A}{t_A} t \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_x = \frac{v_A}{t_A} t \vec{u}_x}$$

$$\# \text{ Pour } t \in [t_A, t_B] : v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = v_A \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_x = v_A \vec{u}_x}$$

$$\# \text{ Pour } t \in [t_B, t_C] : v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = -\frac{v_A}{t_C - t_B} t + \frac{v_A t_C}{t_C - t_B} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_x = \left(-\frac{v_A}{t_C - t_B} t + \frac{v_A t_C}{t_C - t_B}\right) \vec{u}_x}$$

• Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse)

$$\# \text{ Pour } t \in [0, t_A] : a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x = \frac{v_A}{t_A} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_x = \frac{v_A}{t_A} \vec{u}_x}$$

$$\# \text{ Pour } t \in [t_A, t_B] : a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_x = \vec{0}}$$

$$\# \text{ Pour } t \in [t_B, t_C] : a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x = -\frac{v_A}{t_C - t_B} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_x = -\frac{v_A}{t_C - t_B} \vec{u}_x}$$

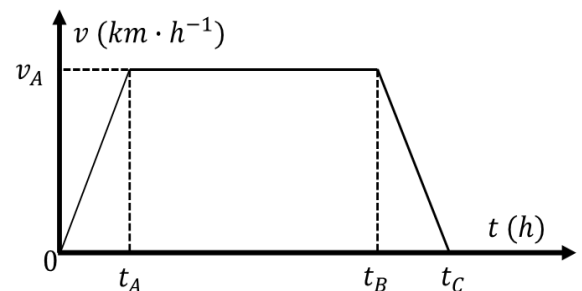
2. D'après la question 1- :

pour $t \in [0, t_A]$, le vecteur accélération est un vecteur constant, colinéaire au vecteur vitesse et de même sens. Le mouvement est donc **rectiligne uniformément accéléré**.

pour $t \in [t_A, t_B]$, le vecteur vitesse est constant (et le vecteur accélération est nul). Le mouvement est donc **rectiligne uniforme**.

pour $t \in [t_B, t_C]$, le vecteur accélération est un vecteur constant, colinéaire au vecteur vitesse, mais de sens opposé. Le mouvement est donc **rectiligne uniformément décéléré**.

3. Allure de l'évolution de la vitesse en fonction du temps :



4. L'énoncé précise qu'à l'issue de la 1^{ère} phase, donc à l'instant de date t_A , la distance parcourue par le RER vaut d . On en déduit donc que $x(t_A) - x(t=0) = d$.

Or, l'origine de l'axe (Ox) étant confondue avec celle de la position initiale du système, cela revient à dire : $x(t_A) = d$.

$$\text{D'après l'énoncé, } x(t_A) = \frac{v_A}{2t_A} t_A^2 = \frac{v_A t_A}{2}$$

En remplaçant $x(t_A)$ par son expression dans la relation précédente, on obtient :

$$\frac{v_A t_A}{2} = d \Rightarrow \boxed{v_A = \frac{2d}{t_A}} \quad \underline{AN} \Rightarrow v_A = \frac{2 \times 800}{80} \quad \text{soit } \underline{v_A = 20 \text{ m.s}^{-1}}$$